

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА**

Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук, М. А. Засядько

Конспект лекцій

з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання
бакалаврів за напрямом підготовки 6.060101 “Будівництво”)

Харків

ХНАМГ

2013

Шутенко, Л. М. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») /Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук, М. А. Засядько; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва – Х.: ХНАМГ, 2013. – 117 с.

Автори: Л. М. Шутенко,
В. П. Шпачук,
М. А. Засядько

Рецензент:

завідувач кафедри будівельних конструкцій д. т. н., проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 30.08.11 р.

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	5
1. Загальні положення. Кінематичний і статичний аналіз споруд	7
1.1. Основні поняття й визначення	7
1.2. Поняття про геометричну незмінюваність. Ступені вільності. Статична визначуваність	11
1.3. Кінематичний метод аналізу геометричної структури	13
1.4. Миттєво змінювані системи	15
1.5. Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності	17
1.6. Припущення, що застосовуються в будівельній механіці	18
Запитання для самоконтролю	20
2. Методи розрахунку статично визначуваних систем	21
2.1. Метод перерізів	21
2.2. Кінематичний метод	21
2.3. Метод заміни в`язей	23
Запитання для самоконтролю	25
3. Статично визначувані рами	26
3.1. Основні поняття. Класифікація рам	26
3.2. Розрахунок рами	27
Запитання для самоконтролю	31
4. Статично визначувані ферми	32
4.1. Основні поняття. Класифікація ферм	32
4.2. Розрахунок ферм	34
4.2.1. Спосіб вирізання вузлів	35
4.2.2. Спосіб моментної точки та спосіб проекцій. Розподіл зусиль у стержнях балкової ферми	41
4.2.3. Визначення зусиль у стержнях складних ферм. Спосіб замкненого перерізу. Спосіб сумісних перерізів	45
4.3 Шпренгельні ферми	47
Запитання для самоконтролю	49
5. Розпірні системи	50
5.1. Основні визначення	50
5.2. Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження	52
5.3. Розрахунок арки з затяжкою	55
5.4. Раціональна вісь тришарнірної арки	56
5.5. Особливості розрахунку розпірних систем	57
5.5.1. Тришарнірна арка при довільно спрямованому навантаженні	57
5.5.2. Тришарнірні рами	58
5.5.3. Тришарнірні аркові ферми	59
5.5.4. Комбіновані та висячі системи	59
Запитання для самоконтролю	63
6. Просторові стержневі системи	64
6.1. Загальні відомості. Геометрична незмінюваність	64

6.2. Просторові ферми	66
6.3. Просторові рами	68
Запитання для самоконтролю	69
7. Основні теореми для пружних систем. Визначення переміщень ...	70
7.1. Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення .	70
7.2. Робота внутрішніх сил. Теореми Лагранжа та Кастіліана	72
7.3. Потенціальна енергія деформації	74
7.4. Теореми про взаємність	77
7.5. Обчислення переміщень за методом Мора	79
7.6. Переміщення від осідання опор	84
7.7. Переміщення від температурного впливу	84
Запитання для самоконтролю	85
8. Варіаційні принципи деформованих систем	87
8.1. Повна потенціальна енергія системи	87
8.2. Принцип варіації переміщень (принцип Лагранжа)	88
8.3. Поняття про принцип варіації навантажень або внутрішніх сил (принцип Кастіліано)	89
Запитання для самоконтролю	90
9. Основи методу скінченних елементів (МСЕ)	91
9.1. Загальні поняття	91
9.2. Види скінченних елементів. Ступені вільності	91
9.3. Кінематичні характеристики вузлів рами	92
9.4. Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги	93
9.5. Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат .	96
9.6 .Матриця жорсткості стержня рами в глобальній системі координат	99
9.7. Матриця жорсткості елемента ферми	102
9.8. Матриця жорсткості усієї системи	102
9.9. Визначення зусиль у стержнях рам	103
9.10. Визначення зусиль у стержнях ферм	106
9.11. Приклад розрахунку рами методом скінченних елементів	106
9.12. Приклад розрахунку ферми МСЕ	111
Запитання для самоконтролю	115
Список джерел	116

ВСТУП

Будівельною механікою називають науку, що вивчає методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість, стійкість при різних впливах. У широкому значенні цього терміна будівельна механіка складається з кількох дисциплін: опору матеріалів; статички споруд або теорії споруд, що зазвичай і називається будівельною механікою; теорії пружності та теорії пластичності. Ці науки, на відміну від будівельної механіки, розглядають роботу споруд або їх елементів, що являють собою, як правило, окремі тіла, при різних припущеннях.

Теорія пружності та теорія пластичності мають за мету визначення напружено-деформованого стану у кожній точці тіла. При цьому у теорії пружності розглядаються випадки, коли матеріал споруд знаходиться у пружній стадії, а в теорії пластичності – у пружно-пластичній стадії.

В *опорі матеріалів* розглядається робота окремих стержнів, для яких вводиться низка припущень, що дозволяють одержати залежність між деформаціями і напруженнями в усіх точках його довільного перерізу.

Будівельна механіка вивчає методи розрахунку споруд як систем, що складаються із пов'язаних між собою стержнів, а також пластин та оболонок на основі спрощуючих припущень.

Сфери застосування кожної з перерахованих наук важко розмежувати. Часто одну й ту саму задачу можна віднести до кількох дисциплін, а методи розв'язання та припущення однієї науки використовують в інших. Так, у будівельній механіці широко використовуються положення опору матеріалів і теорії пружності, а також методи інших наук: теоретичної механіки, математики, фізики.

Будівельна механіка як наука про міцність виокремилась із загальної механіки. Її витoki зазвичай пов'язують з Галілео Галілеєм (1564-1642). У його праці «Розмірковування та математичні докази, що стосуються двох нових галузей науки» (1638) вперше була зроблена спроба систематизувати накопичені відомості про міцність споруд. Деякі положення, наведені Галілеєм, використовуються і в наш час, зокрема в теорії згину балок. Але правильної теорії розрахунків на міцність Галілей дати не міг через недостатній розвиток наук, експерименту. Зокрема, для отримання вірного розв'язку задачі згину балок знадобилось близько 200 років. Важливу роль у цьому зіграв виявлений Р. Гуком (1635-1703) закон пропорційності між навантаженням та переміщенням, а також роботи Я. Бернуллі (1654-1705) та ін. Розвитку будівельної механіки у XVIII столітті сприяли досягнення в галузі механіки та математики, особливо роботи Л. Ейлера (1707-1783) і Ж. Л. Лагранжа (1736-1813).

Хоча до кінця XVIII століття вже були закладені теоретичні основи будівельної механіки, вона все ще залишалась відірваною від потреб практики. На той час з явилася необхідність у зведенні великих промислових споруд, будівництві залізниць. Інтенсифікація виробництва, впровадження в будівництві коштовного на той час металу викликала необхідність економії витрат матеріалу, а отже, розвитку практичних методів розрахунку споруд. Рішучим поворотом до потреб практики стала реформа будівельної механіки, здійснена Л. Нав'є (1785-1836). Замість вивчення руйнування споруд він почав розглядати їх робочий стан. При цьому Нав'є виходив з того, що пропорційність між напруженнями та деформаціями зберігається до самого руйнування. Хоча в дійсності ця пропорційність спостерігається лише в межах дії закону Гука, введені припущення давало можливість визначити те навантаження, «яким можна завантажити елемент без того, щоб виникаючі у ньому зміни

збільшувалися з часом». Завдяки роботам Нав'є, а також Коші, Сен-Венана та ін. з будівельної механіки у цей період виокремилася та набула самостійного значення теорія пружності.

Якщо на початку XIX ст. велике значення мали графічні методи, то ускладнення конструкцій укінці XIX – на початку XX століть, поява споруд з клепаного металу (мости, ємності, судна) зумовила розвиток аналітичних методів. Важливу роль у їх розробці зіграли такі вчені, як Г. Ламе (1795-1870), Сен-Венан (1797-1886), Д. Максвелл (1831-1879), О. Мор (1835-1918), Д. Релей (1842-1919), С. П. Тимошенко (1878-1972). У другій половині XIX століття з'явився новий будівельний матеріал – залізобетон. Його використання у спорудах призвело у першій половині XX ст. до розробки системи придатних для широкого застосування методів розрахунку статично невизначуваних систем.

Розвиток у 20-30-х роках XX ст. теорії пластичності дозволив прослідкувати поведінку споруди на усіх етапах її експлуатації до самого руйнування. Дослідження, виконані у цьому напрямку, створили умови для розробки нового методу розрахунку – за граничними станами. Цей метод отримав розповсюдження, перш за все, у розрахунках залізобетонних конструкцій завдяки роботам Лолейта та Гвоздева.

Розвитку будівельної механіки сприяли роботи вчених, які працювали в Україні, зокрема, В.Л. Кирпичов, С.П. Тимошенко, Є. О. Патон, О.М. Динник, М.М. Крилов, М.М. Боголюбов, М.В. Корноухов, О.А. Уманський, О.І. Виноградов, Г.С. Писаренко та багато інших.

До середини XX ст. у будівельній механіці переважало прагнення до розробки відносно простих, а також наближених методів, які вимагають можливо менш складних обчислень. Широке розповсюдження комп'ютерів у другій половині XX ст. обумовило переверт в будівельній механіці. На перше місце при оцінюванні методів розрахунку ставиться не простота їх, а універсальність. Надається можливість більшого наближення розрахункових схем до реальних споруд, широко використовуються методи лінійної алгебри, статичні методи, математичне програмування, елементи топології. Завдяки можливості автоматизації розрахунків зародились нові розділи будівельної механіки - динамічна стійкість, теорія надійності, теорія повзності, нелінійна теорія оболонок, оптимальне проектування, один з найбільш універсальних методів будівельної механіки – метод скінченних елементів – своєю появою зобов'язаний комп'ютерам. Розвиток обчислювальної техніки та пов'язана з ним універсалізація методів будівельної механіки не означає повної відмови від класичних методів. Вони є тими підвалинами і тим інструментом, за допомогою якого перевіряється усе нове. Актуальність класичних методів будівельної механіки зумовлюється також тим, що багато споруд являють собою прості системи, для яких раціонально застосовувати прості методи розрахунку. Будівельна механіка – прикладна наука. Її завданням є розробка таких методів розрахунку, які забезпечують, з одного боку, надійність споруд і, з іншого, їх економічність. В наш час неможливо уявити жодної більш-менш відповідальної споруди, конструкції якої не були попередньо розраховані на міцність, жорсткість, стійкість. Ці розрахунки виконуються на основі методів будівельної механіки, і їх вивчення є одним з важливих етапів підготовки майбутнього спеціаліста-будівельника.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ. КІНЕМАТИЧНИЙ І СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СПОРУД

1.1. Основні поняття й визначення

З точки зору будівельної механіки *спорудою називається тіло або система тіл, яка призначена для сприймання навантаження або інших впливів і передачі їх на основу або на іншу споруду.*

Для визначення напружено-деформованого стану споруди неможливо врахувати всі властивості споруди. Тому для розгляду приймається її спрощена – розрахункова схема *Розрахункова схема споруди – це спрощена схема дійсної споруди, що відбиває її основні риси.* Наприклад, каркас будівлі (рис 1, а) являє собою просторову систему (рис 1, б). У цій просторовій системі можна виділити плоскі поперечні конструкції із суцільним (рис 1, г) або ґратчастим (рис 1, в) елементами, які переважно визначають здатність усієї споруди сприймати задане навантаження.

Елементами розрахункової схеми споруди є:

- тіла, що складають споруду;
- з'єднання;
- опори;
- навантаження.

Залежно від співвідношення геометричних розмірів *тіл, що складають споруду*, виділяють: *стержні* (рис. 2,а), в яких один вимір (довжина l) перевищує два інших; *пластинки* (рис. 2,б) та *оболонки* (рис. 2,в), в яких виміри в двох напрямках значно більші, ніж у третьому – товщині t ; *масивні тіла* (рис. 2,г), які мають усі три розміри одного порядку; *тонкостінні стержні* (рис. 2,д), усі три виміри яких різних порядків.

Системи, що складаються зі стержнів, називаються *стержневими*. У розрахунковій схемі кожний стержень відображають віссю – лінією, що з'єднує центри ваги його поперечних перерізів.

Споруди поділяють на плоскі, просторові та плоско-просторові. Якщо осі всіх стержнів разом із навантаженням розташовані в одній площині, споруду називають *плоскою*. У *плоско-просторових* спорудах осі стержнів розташовані в одній площині, а навантаження не належить їй. *Просторові* – це споруди, у яких осі стержнів не розташовані в одній площині.

У цьому курсі розглядаються стержневі, переважно плоскі, системи.

З'єднання стержнів між собою здійснюється *жорстко* (рис. 3,а) або *шарнірно* (рис. 3,б...г). При цьому припускають, що шарніри *ідеальні*, тобто такі, у яких відсутнє тертя. Шарнір, наведений на рис 3,в, на відміну від шарніра на рис. 3,г, називають *неповним*. Залежно від кількості з'єднаних у шарнірі стержнів розрізняють *прості* та *кратні*, інакше *складні*, шарніри. Простий шарнір (рис. 3,б,в) з'єднує два стержні, кратний (рис. 3,г) - три й більше. Кратний шарнір можна замінити кількома простими шарнірами, приєднуючи кожен наступний окремим простим шарніром. Наприклад, шарнір, наведений на рис 3,г, можна замінити системою простих шарнірів, наведених на рис. 3,д. Взагалі для шарніра, що з'єднує C шарнірів, еквівалентна кількість простих шарнірів визначається за формулою: $III=C-1$.

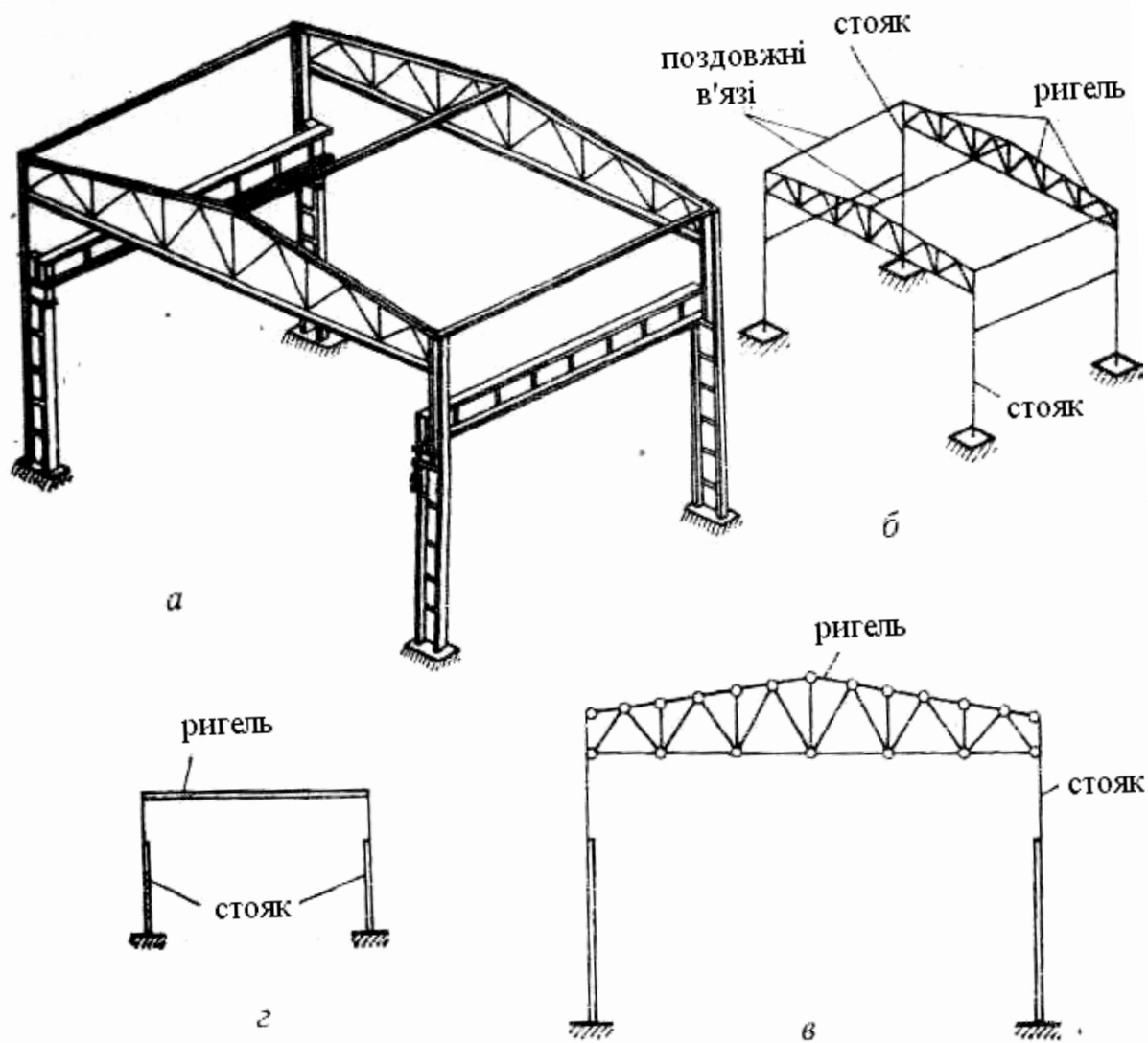


Рис. 1

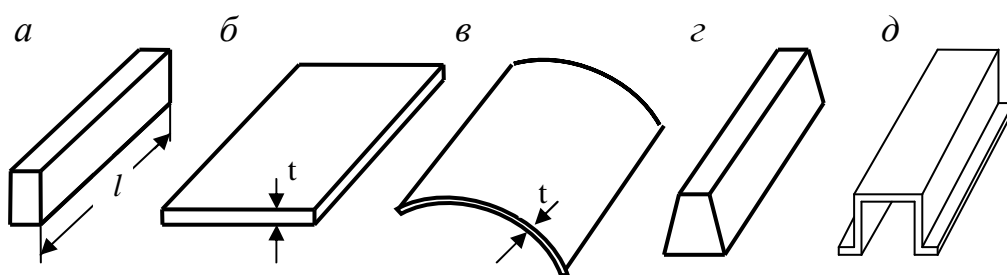


Рис. 2

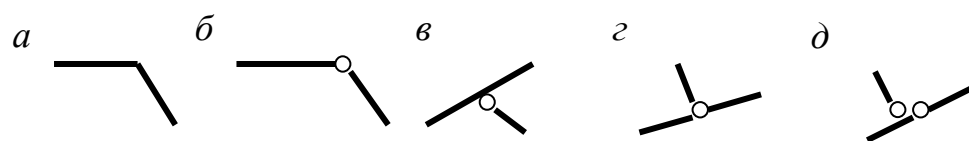


Рис. 3

Залежно від способів з'єднання стержнів розрізняють системи з переважно жорсткими з'єднаннями стержнів – *рами* (рис. 4,а), системи тільки з шарнірними з'єднаннями – *ферми* (рис. 4,б), *комбіновані системи* (рис. 4,в).

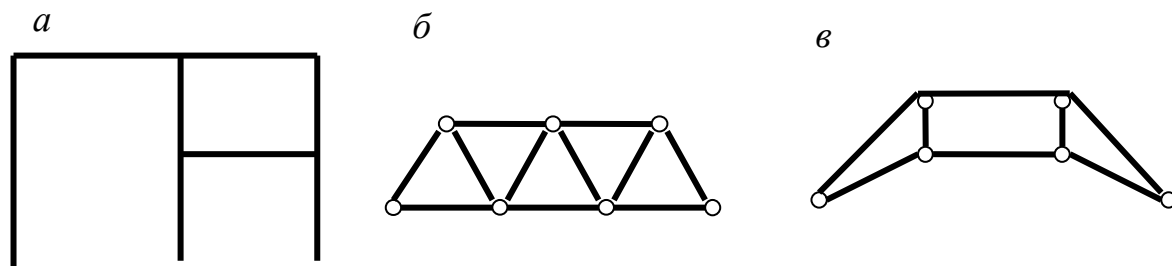


Рис. 4

Опори слугують для прикріплення споруди до землі або до іншої споруди. Розрізняють три основних види опор плоских споруд: *шарнірно-рухома опора* (рис. 5,а), що втримує від лінійного переміщення вздовж опорного стержня; *шарнірно-нерухома опора* (рис. 5,б), що утримує від будь-яких лінійних переміщень; *затискаюча нерухома опора* або *затиснення* (рис. 5,г), що не допускає як лінійних, так і кутових зміщень. Використовують і такі опорні закріплення, які показані на рис. 5,д,е: *поперечний* (рис. 5,д) та *поздовжній* (рис. 5,е) *повзун*, а також пружні опори (рис. 5,и), у яких можливі переміщення в напрямку закріплень, пропорційні діючим у них силам.

Кожна опора накладає обмеження на переміщення перерізу, у якому вона знаходиться. Наприклад, шарнірно-рухома опора не дозволяє переміщення опорного перерізу в напрямку опорного стержня. Кількість таких обмежень являє собою кількість опорних в'язей. Так, шарнірно-нерухома опора обмежує переміщення опорного перерізу у двох напрямках, тобто накладає дві в'язі. Нерухомість опорного перерізу в напрямку накладеної в'язі, відповідно законам Ньютона, еквівалентна дії сили в напрямку накладеної в'язі. Ця сила називається *опорною реакцією*. Отже, *кількість опорних реакцій відповідає кількості опорних в'язей*. Так, в шарнірно-рухомій опорі (рис. 5,а) виникає одна реакція – R , спрямована вздовж опорного стержня, в шарнірно-нерухомій опорі – дві, наприклад, вертикальна – V і горизонтальна – H (рис. 5,б), в затисненні – три: вертикальна – V , горизонтальна – H і реактивний момент – M (рис. 5,г).

Зазначимо, що шарнірно-нерухома опора у розрахунковій схемі може бути зображена як шарнір, що з'єднує опорний переріз безпосередньо з основою (рис. 5,в).

Залежно від напрямку опорних реакцій *при вертикальному навантаженні* з поміж інших систем виокремлюють *балкові системи* (рис. 6,а,б), в яких реакції тільки вертикальні, і *розпірні* (рис. 6,в), у яких, крім вертикальних, з'являються й горизонтальні опорні реакції, які називають розпором.

Одним із важливих питань, що вирішуються при виборі розрахункової схеми споруди, є з'ясування характеру й величини зовнішніх впливів. Серед них головне місце займають силові впливи, або **навантаження**. Вони класифікуються за такими ознаками: за характером розподілу – *розподілені* та *зосереджені*; за часом дії – *постійні* й *тимчасові*; за характером прикладання – *статичні* та *динамічні*, *рухомі* й *нерухомі*. Розподілені навантаження бувають *об'ємні* й *поверхневі*. Об'ємне

навантаження діє в кожній точці об'єму тіла – гравітаційні сили, сили інерції та ін. Поверхневі навантаження з'являються в результаті контакту з іншими тілами.

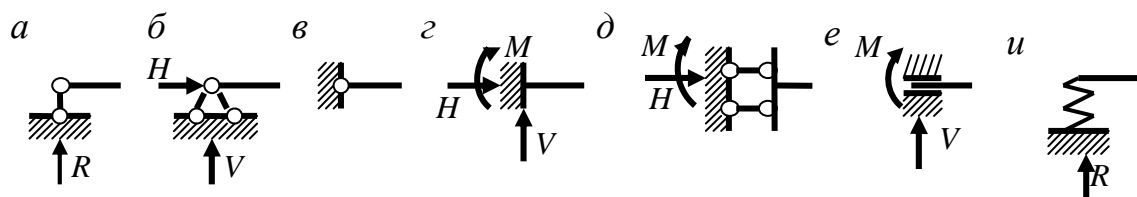


Рис. 5

За своєю суттю всі навантаження є розподіленими за об'ємом чи за площею поверхні тіла. Але, за принципом Сен-Венана, якщо розміри зони дії навантаження малі порівняно з розмірами тіла, воно може бути зображене у вигляді навантаження, розподіленого вздовж лінії, або зосередженої сили, що діє в одній точці.

Постійними називають навантаження, що діють протягом усього терміну експлуатації споруди. Таким навантаженням є, наприклад, власна вага тіла. Тимчасові навантаження діють протягом обмеженого терміну. Такими є снігові, вітрові навантаження, вага обладнання та ін. Постійне навантаження діє на споруду в різних сполученнях із тимчасовими навантаженнями. Кожне таке сполучення називають *завантаженням*.

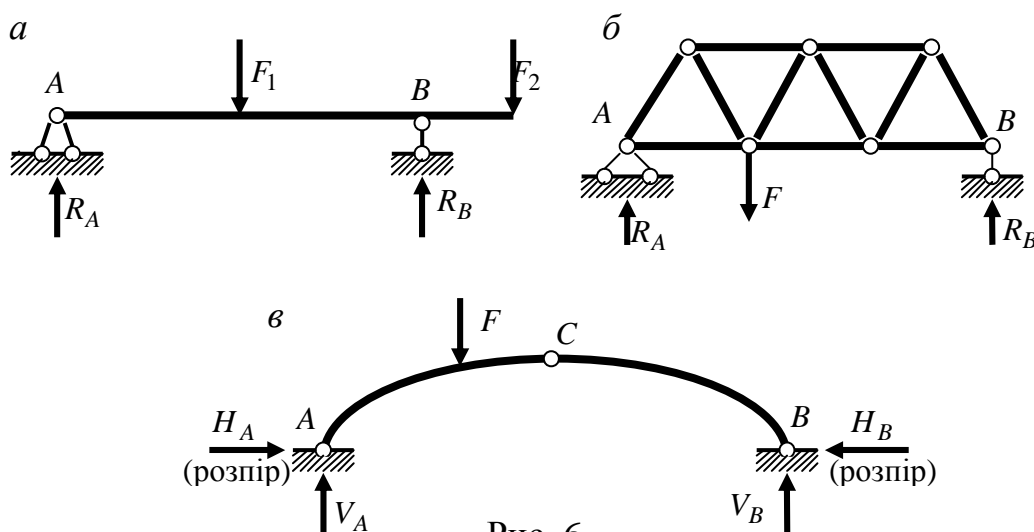


Рис. 6

Статичним називають таке навантаження, яке не змінюється за часом або змінюється так, що викликаними ним прискореннями точок споруди можна знехтувати. Динамічне навантаження – це навантаження, величина, напрямок або розташування якого змінюється так, що силами інерції, які виникають при цьому, неможливо знехтувати. Нерухомими є навантаження, що не змінюють свого розташування на споруді. До них можна зарахувати вагу споруди та окремих її частин, вагу стаціонарного обладнання й таке ін. Прикладами рухомого навантаження можуть бути дія автомобіля чи залізничного потяга на мосту, мостового крану на підкрановій балці та ін.

Крім навантажень, споруда може зазнавати й інших впливів, наприклад, температурних, осідання опор.

1.2. Поняття про геометричну незмінюваність. Ступені вільності. Статична визначуваність

Кожна споруда під дією навантаження деформується, взаємне розміщення її точок змінюється. Якщо переміщення точок стержневої системи можливі тільки за рахунок деформації її елементів, систему називають *геометрично незмінюваною*. Якщо геометрія системи може змінюватись без деформації її елементів, систему називають *геометрично змінюваною*. Геометрично змінювані системи можуть залишатися нерухомими лише при навантаженнях окремих видів, тому їх не застосовують у спорудах.

Оскільки точки геометрично незмінюваної системи можуть зміщуватись лише за рахунок деформацій, при перевірці геометричної незмінюваності споруди достатньо розглядати її як систему абсолютно жорстких тіл. Якщо при цьому припущенні переміщення відсутні, споруда геометрично незмінювана. Шарнірно-стержневий трикутник (рис. 7,а) є найпростішою плоскою геометрично незмінюваною системою тому, що за умов абсолютної жорсткості стержнів взаємне розміщення будь-яких його точок залишається фіксованим. Найпростішим прикладом геометрично змінюваної системи є шарнірно-стержневий чотирикутник (рис. 7,б). Дійсно, взаємне розташування стержнів, що його складають, може змінюватись без будь-якої їх деформації.

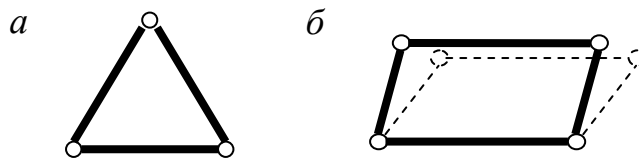


Рис. 7

Для дослідження рухомості системи жорстких тіл слугують поняття *ступенів вільності*. Числом ступенів вільності називають кількість можливих незалежних зміщень точок системи. Інакше - це мінімальна кількість геометричних параметрів, що визначають взаємне розташування всіх частин споруди.

Назвемо *диском* будь-яку незмінювану частину плоскої споруди. Зокрема, диском може бути стержень, масивне тіло, шарнірно-стержневий трикутник (рис. 7,а) та ін. Кожний диск має на площині три ступеня вільності. Дійсно, щоб визначити положення всіх його точок, достатньо задати дві координати якої-небудь точки й кутову координату будь-якої прямої, що проходить через цю точку.

З'єднання дисків між собою та опорні пристрої обмежують можливість вільних переміщень дисків, тобто накладають на споруду *в'язі*. В'язю називають пристрій, що усуває яке-небудь одне елементарне переміщення. Отже, кількість в'язей у з'єднанні відповідає кількості незалежних переміщень, що усуваються ними. Так, при жорсткому з'єднанні дисків відпадає можливість їх взаємних лінійних і кутових переміщень, тобто таке з'єднання накладає три в'язі, а кількість його ступенів вільності дорівнює нулю. Простий шарнір накладає дві в'язі, що усувають можливість взаємних лінійних переміщень дисків, і має одну ступінь вільності – їх взаємний поворот навколо шарніра.

Аналогічно визначається кількість в'язей і ступенів вільності опорних закріплень. Шарнірно-рухома опора накладає одну в'язь і має два ступеня вільності. Шарнірно-нерухома опора накладає дві в'язі й має один ступінь вільності. Затискуюча нерухома опора (затиснення) накладає три в'язі. У такому закріпленні кількість ступенів вільності дорівнює нулю.

Позначивши кількість дисків D , кількість шарнірів III , кількість опорних в'язей C_o , можна на основі наведених вище міркувань записати формулу Чебишова для визначення кількості ступенів вільності плоскої системи:

$$W = 3D - 2III - C_o. \quad (1)$$

Зазначимо, що у цій формулі не враховуються жорсткі з'єднання дисків, оскільки при такому з'єднанні диски вважаються одним диском.

На основі одержаної кількості ступенів вільності виконують *кінематичний аналіз* споруди. Тут можливі три випадки: $W > 0$, $W = 0$, $W < 0$. Очевидно, що при $W > 0$ система є геометрично змінюваною. Умови $W = 0$ та $W < 0$ не завжди свідчать про зворотне. Наприклад, балка, наведена на рис. 8, геометрично змінюваною (можливе зміщення балки показане тонкою лінією), проте для неї $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1 < 0$.



Рис. 8

Для ферм, стержні яких можна вважати в'язями між вузлами, зручно користуватися іншою формулою для визначення кількості ступенів вільності:

$$W = 2Y - C - C_o, \quad (2)$$

де Y - кількість вузлів, C - кількість стержнів ферми.

Кількість ступенів вільності тісно пов'язана з поняттям статичної визначуваності. *Статично визначуваною називають геометрично незмінювану систему, усі зусилля в якій визначаються з умов рівноваги.* Висновок про статичну визначуваність можна зробити залежно від кількості ступенів вільності. Дійсно, для окремого диска на площині число умов рівноваги дорівнює трьом, а для системи дисків без опор - $3D$. У кожній в'язі, накладеній на диск, діє певне зусилля (у простому шарнірі - дві в'язі й два зусилля, у шарнірно-рухомій опорі - одна в'язь й одне зусилля і т.д.). Загальна кількість в'язей між дисками дорівнює $2III + C_o$. Тоді при $W = 0$ з формули Чебишова отримуємо $3D = 2III + C_o$, тобто кількість зусиль в усіх в'язях дорівнює числу умов рівноваги, і система є статично визначуваною. Слід зазначити, що цей висновок справедливий, якщо всередині кожного диска системи немає зайвих в'язей. Зокрема, рами, що мають у своєму складі диски у вигляді замкнених контурів, можуть бути статично невизначуваними і при $W = 0$.

Від'ємне значення кількості ступенів вільності ($W < 0$) геометрично незмінюваної системи свідчить про наявність зайвих в'язей, тобто про її статичну невизначуваність.

1.3. Кінематичний метод аналізу геометричної структури

Як зазначалося вище, умова $W \leq 0$ є необхідною, але недостатньою для визначення геометричної незмінюваності споруди. У зв'язку із цим додатково повинен бути здійснений аналіз геометричної структури системи (*геометричний аналіз*). Цей аналіз виконують шляхом умовного складання системи з перевіркою достатності в'язей у кожному з'єднанні.

Наведемо основні способи утворення геометрично незмінюваних систем, що ґрунтуються на найпростішій геометрично незмінюваній системі, тобто шарнірно-стержневому трикутнику:

1. Приєднання нового вузла до геометрично незмінюваної системи двома стержнями, осі яких не лежать на одній прямій (рис. 9, а).
2. З'єднання двох дисків трьома стержнями, осі яких не паралельні й не перетинаються в одній точці (рис. 9, б).
3. З'єднання двох дисків стержнем AB і шарніром C , який не лежить на прямій AB (рис. 9, в).
4. З'єднання трьох дисків трьома шарнірами, що не лежать на одній прямій (рис. 9, г).

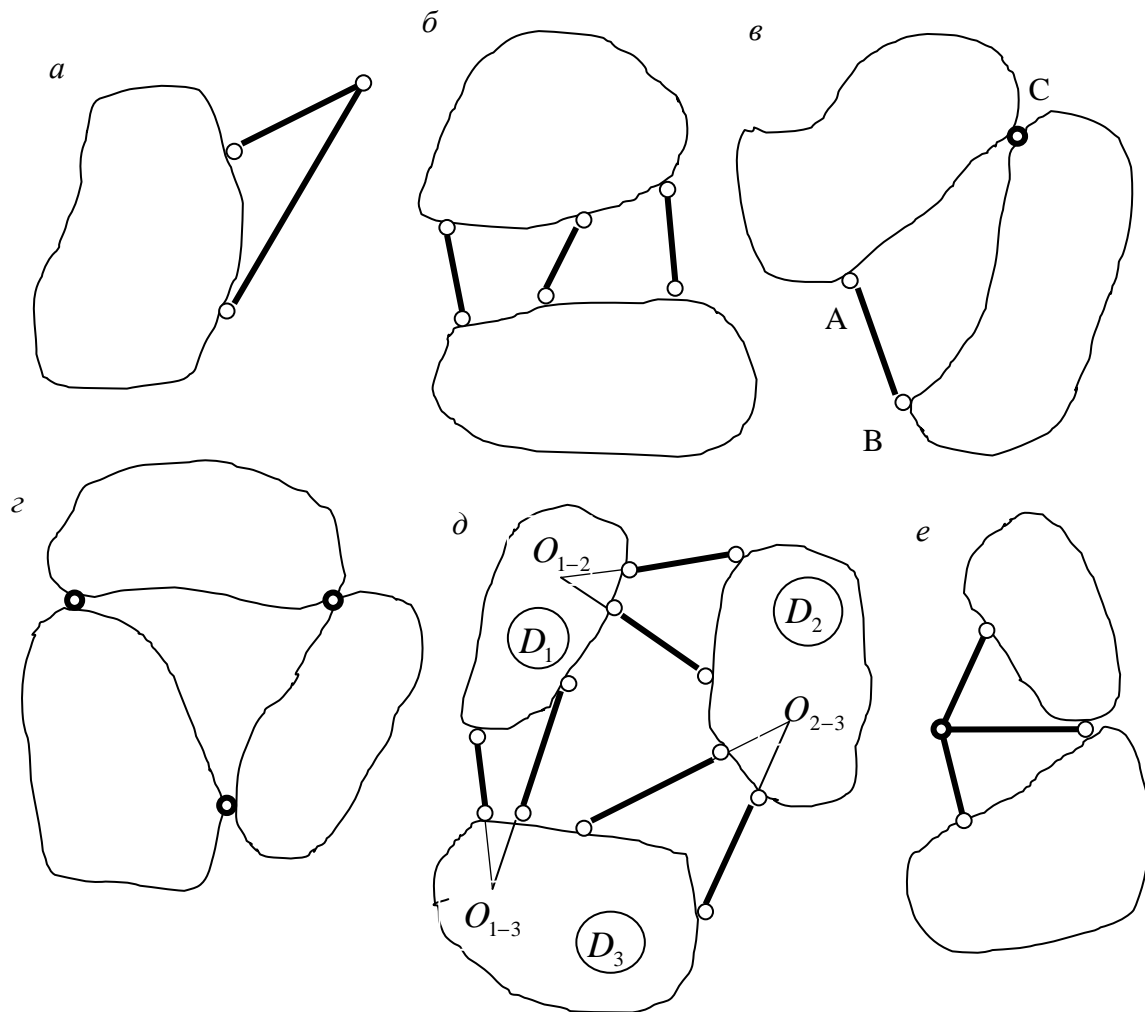


Рис. 9

5. З'єднання трьох дисків трьома парами стержнів (рис. 9,д). При цьому точки перетину пар стержнів - O_{1-2} , O_{2-3} , O_{1-3} , що є миттєвими центрами обертання дисків D_1 та D_2 , D_2 та D_3 , D_1 та D_3 , не повинні розміщуватися на одній прямій.
6. Приєднання до системи, що має один ступінь свободи, тріади – трьох стержнів, що не лежать на одній прямій і з'єднані в одній точці шарніром (рис. 9,е).

Нагадаємо, що у (1), (2) не враховані випадки жорсткого з'єднання дисків, отже жорстко з'єднані диски завжди повинні враховуватися як один диск.

Також слід мати на увазі, що наведені вище варіанти з'єднання містять мінімально необхідну (з точки зору геометричної незмінюваності) кількість в'язей. Додаткові в'язі обумовлюють статичну невизначуваність системи і називаються *зайвими в'язями*.

З урахуванням розглянутих способів утворення геометрично незмінюваних частин систем виконаємо кінематичний аналіз споруд, показаних на рис. 10.

Розрахункова схема *рами* на **рис. 10,а** складається із трьох дисків - $ABCK$, KE та KFG , тобто $D=3$, має один кратний шарнір у т. K , що з'єднує три диски, отже $III=3-1=2$, і опорні в'язі: по 3 у затисненнях A та E і одну у шарнірно-рухомій опорі G , тобто $C_0 = 7$.

Кількість ступенів свободи за (1) становить: $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 7 = -2$.

Оскільки необхідна умова геометричної незмінюваності виконана ($W < 0$), далі перевіримо геометричну структуру. Ламаний стержень $ABCK$ нерухомо з'єднаний із землею (затиснення в точці A), як і стержень KE (затиснення в точці E), отже, разом із землею вони можуть далі вважатися одним диском $ABCKE$. З'єднання стержнів $ABCK$ та KE в точці K шарніром є зайвим з точки зору нерухомості стержнів $ABCK$ та KE . Стержень KFG приєднаний до нерухомих точок шарніром (в точці K) і опорним стержнем GH (до точки H землі). Через те, що точка K не лежить на прямій GH , це з'єднання також нерухоме. Отже, система геометрично незмінювана і, оскільки $W < 0$, містить зайві в'язі, тобто є статично невизначуваною.

Ферма на **рис. 10,б** складається з 17 стержнів, 10 вузлів і має три опорні в'язі: $C=17$, $Y=10$, $C_0 = 3$, отже за (2) маємо: $W = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0$.

Схема ферми може бути одержана послідовним приєднанням вузлів до шарнірного трикутника (наприклад, 1-2-3) парами стержнів, що не лежать на одній прямій. Зокрема, вузол 4 приєднується стержнями 2-4 та 3-4, далі вузол 5 стержнями 4-5 та 3-5. Так само далі послідовно приєднуються вузли 6, 7, 8, 9, 10. Отже, ферма являє собою незмінювану систему – диск. Далі вона прикріплена до землі трьома непаралельними опорними стержнями, що не перетинаються в одній точці. Таким чином ферма, наведена на рис. 10,б, є геометрично незмінюваною й статично визначуваною ($W = 0$).

Для *комбінованої системи* на **рис. 10,в**, розглядаючи кожний стержень як диск, маємо: $D = 9$, $T = 10$, $C_0 = 7$. Тоді за (1) одержимо: $W = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 10 - 7 = 0$.

Далі виконуємо аналіз геометричної структури. Якби стержні AB та BC в точці C були з'єднані жорстко, система стержнів AC та BC була б нерухомою

(зв'язок із землею здійснюється трьома непаралельними опорними стержнями, що не перетинаються в одній точці). В дійсності в точці C з'єднання шарнірне, тому система ACB має одну ступінь вільності. Точки K та K' нерухомо з'єднані із землею. Приєднання точок E та E' парами стержнів, відповідно KE , EF та $K'E'$, $E'F'$, не змінюють кількості ступенів вільності системи ACB . Точка G приєднується до одержаної системи з одним ступенем вільності за допомогою тріади. Це зменшує кількість ступенів вільності на одиницю. Таким чином, наведена система є геометрично незмінюваною й статично визначуваною ($W = 0$).

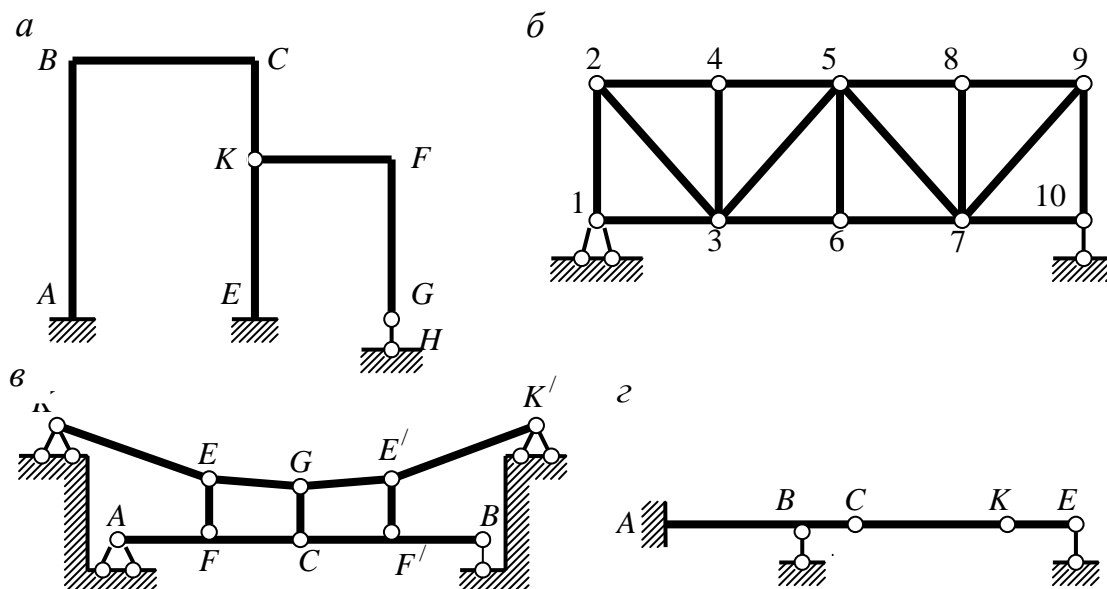


Рис. 10

Для багатопрогової балки на **рис. 10,г** маємо $D=3$, $III=2$, $C_0=5$. Кількість ступенів вільності балки становить: $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.

Стержень AC жорстко з'єднаний із землею і разом з нею утворює диск. Він геометрично незмінюваний, і опорний стержень у точці B зайвий. До диска AC і землі приєднаний диск KE двома стержнями (опорним у точці E та диском-стержнем KC). Таке з'єднання утворює геометрично змінювану систему.

1.4. Миттєво змінювані системи

До миттєво змінюваних відносять такі системи, точки яких здатні переміщуватися без деформації їхніх елементів з точністю до малих вищого порядку.

Розглянемо систему, показану на **рис. 11,а**. Її можна зобразити як три диски – AC , BC та AB (земля – диск), з'єднані трьома шарнірами, тому вона є геометрично незмінюваною ($W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 - 3 = 0$). Спроектувавши сили, що діють у вузлі C , на вертикальну вісь, одержимо: $N = F/2 \sin \alpha$.

Якщо $\alpha=0$, шарніри A , B та C , що з'єднують три диски (**рис. 11,б**), розташовуються на одній прямій. Тоді при прикладенні навантаження точка C у початковому стані має можливість нескінченно малого переміщення вздовж спільної дотичної до траєкторії руху, що відповідає обертанню стержня AC навколо точки C і стержня BC навколо точки B . Така система називається *миттєво змінюваною*.

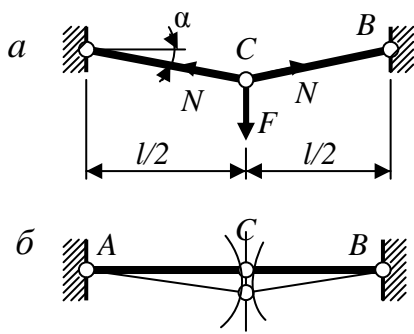


Рис. 11

Теоретично рухомість миттєво змінюваних систем нескінченно мала, але фактично переміщення в такій системі виявляються незрівнянно більшими, ніж у геометрично незмінюваній системі. До того ж, при $\alpha=0$, зусилля у стержнях системи (рис. 11,б) стають нескінченно великими (при $\alpha \rightarrow 0 \quad \sin \alpha \rightarrow 0$ і $N = F / 2 \sin \alpha \rightarrow \infty$). Ця особливість є загальною для всіх миттєво змінюваних систем, тому вони не можуть застосовуватися в спорудах. Слід також уникати використання систем, близьких за геометричною структурою до миттєво змінюваних.

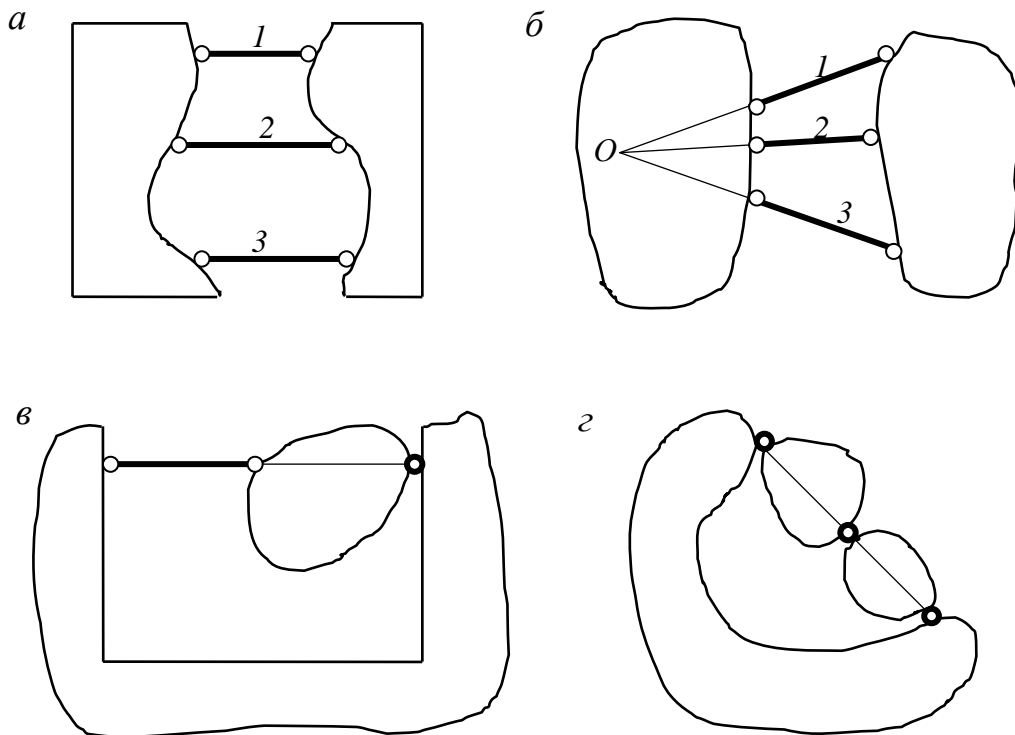


Рис. 12

Геометричною ознакою миттєвої змінюваності є неправильне розміщення в'язей у з'єднаннях частин споруди при достатній їх кількості. Наприклад, з'єднання двох дисків трьома стержнями, осі яких паралельні (рис. 12,а) або перетинаються при продовженні в одній точці (рис. 12,б), утворює миттєво змінювану систему. Якщо два диска з'єднані шарніром та стержнем, вісь якого проходить через центр шарніра (рис. 12,в), система також миттєво змінювана.

У з'єднанні трьох дисків ознакою миттєвої змінюваності є розташування миттєвих центрів обертання (в окремому випадку трьох шарнірів) на одній прямій (рис. 12,г).

1.5. Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності

Крім наведеного вище *кінематичного методу*, для перевірки геометричної незмінюваності можна застосовувати й *статичний метод*.

Цей метод ґрунтується на тому, що геометрично змінювана система за умов довільного навантаження не може бути врівноваженою. Спроба пристосувати умови рівноваги для розрахунку такої системи приводить до несумісних рівнянь. Так, у балці, зображеній на рис. 13, виходячи з умов рівності нулю моментів сил відносно лівої опори, маємо $R_B = F \cdot a / l$, а з умов рівності нулю згинаючого моменту в точці C - $R_B = 0$.

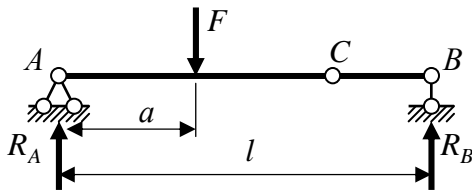


Рис. 13

Отже, *суперечність, що виникає при обчисленні реакцій і внутрішніх зусиль від довільного навантаження, є статичною ознакою геометричної змінюваності системи.*

Аналітичною або *статичною ознакою миттєвої змінюваності є наявність у системі нескінченно великих, або невизначених (типу 0/0) зусиль* *.

Найпростішим навантаженням є нескінченно мале – нульове навантаження. У зв'язку із цим для перевірки геометричної незмінюваності статичним методом можна застосувати *спосіб нульового навантаження*.

Для прикладу перевіримо геометричну незмінюваність ферми, що наведена на рис. 14,а, застосувавши кінематичний і статичний методи.

Кінематичний метод. Кількість ступенів свободи ферми дорівнює нулю ($W=2 \cdot 20 - 32 - 8 = 0$). Аналізуючи геометричну структуру, виділимо диски 1-2-4-5 та 7-6-9-10. Вважаючи, що земля також є диском, маємо випадок з'єднання трьох дисків трьома парами стержнів: 4-6 та 5-7, A-2 та B-3, C-8 та D-9. Стержні 4-6 та 5-7 паралельні один одному, а також паралельні прямій $O_1 O_2$, що проходить через миттєві центри обертання (O_1 та O_2) дисків 1-2-4-5 та 7-6-9-10 відносно землі. Оскільки паралельні прямі перетинаються в нескінченності, точка перетину цих прямих належить кожній із них, тобто й прямій $O_1 O_2$. Ця точка одночасно є точкою перетину прямих 4-6 та 5-7, тобто миттєвим центром обертання дисків 1-2-4-5 та 7-6-9-10 один відносно одного. Отже, три миттєвих центра обертання трьох дисків відносно один одного розташовані на одній прямій, тому система миттєво змінювана.

Статичний метод. Прикладаємо до ферми довільне навантаження F_1, F_2 і проведемо переріз I-I. Виходячи з умови рівноваги лівої частини, одержимо:

$$\sum M_{O_1} = 0; N_{5-7} \cdot r_1 + N_{4-6} \cdot r_2 = -F_1 \cdot d.$$

Аналогічно з умови рівноваги правої частини впливає:

$$\sum M_{O_2} = 0; N_{5-7} \cdot r_1 + N_{4-6} \cdot r_2 = -F_2 \cdot 2d.$$

* Інакше, аналітичною ознакою миттєвої змінюваності є обернення на нуль визначника системи рівнянь рівноваги: $\det D = 0$.

Оскільки навантаження довільне, $F_1 \cdot d \neq F_2 \cdot 2d$. Таким чином, отримані рівняння є суперечливими, і система миттєво змінювана.

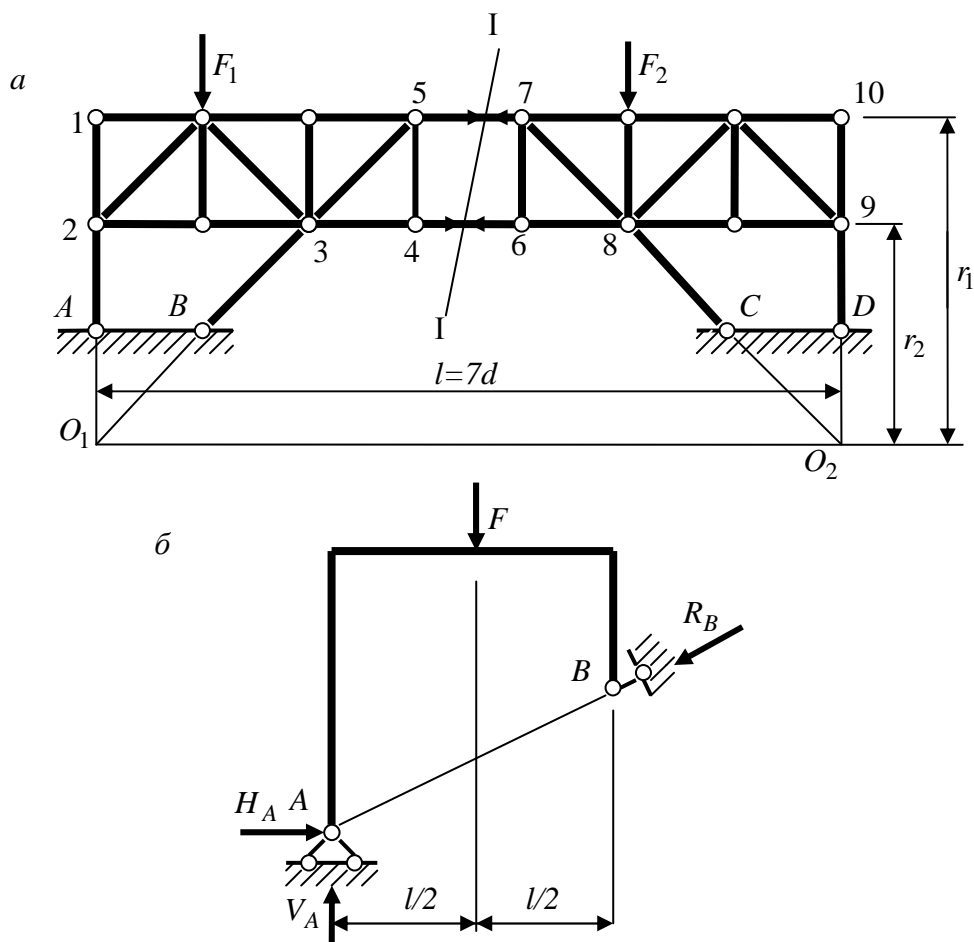


Рис. 14

Далі, застосовуючи статичний метод, перевіримо геометричну незмінюваність рами, що зображена на рис. 14,б.

Запишемо умову рівноваги для визначення реакції R_B :

$$\sum M_B = F \cdot l/2 + R_B \cdot 0 = 0,$$

звідки

$$R_B = \pm (F \cdot l/2)/0.$$

При довільному значенні F отримаємо $R_B = \pm \infty$, при $F = 0$ маємо $R_B = 0/0$, тобто розглянута рама є миттєво змінюваною системою.

1.6. Припущення, що застосовуються в будівельній механіці

Основні припущення, що використовуються в будівельній механіці, можна поділити на дві групи.

Перша група складається зі звичайних для опору матеріалів припущень щодо властивостей матеріалу: *суцільність і безперервність, однорідність, лінійна пружність* (справедливість закону Гука) матеріалу.

До другої групи відносять припущення щодо поведінки самої споруди. Це, у першу чергу, припущення про *лінійну деформованість* споруди, а також припущення щодо *малих переміщень*.

Зазвичай в будівельній механіці вивчають лінійно деформовані системи, тобто такі, у яких переміщення й навантаження пов'язані лінійною залежністю. З цього припущення випливає *принцип незалежності дії сил*, згідно з яким переміщення в пружній системі від дії суми сил (рис. 15,а) можна одержати як суму відповідних переміщень від кожної окремої сили (рис. 15,б,в):

$$y(F_1, F_2) = y(F_1) + y(F_2). \quad (3)$$

Відзначимо, що припущення щодо лінійної деформованості передбачає також наявність пропорційного зв'язку між силою й переміщенням:

$$y(k \cdot F) = k \cdot y(F). \quad (4)$$

У залежностях (3) та (4) замість переміщень можуть використовуватись будь-які фактори, що визначають напружено-деформований стан споруди (напруження, зусилля, деформації, переміщення). Співвідношення (3) та (4) справедливі й для інших зовнішніх впливів: температурних, осідання опор та ін. У такому разі термін *принцип незалежності дії сил* є неточним, і його слід замінити більш загальним терміном – *принцип незалежності впливів* або *принцип суперпозиції*.

У зв'язку з необхідністю підвищення точності розрахунків останнім часом посилюється інтерес до систем із нелінійним зв'язком між переміщеннями й навантаженнями. Ця нелінійність може виникнути внаслідок нелінійності матеріалу – *фізично нелінійна система*, чи визначатися властивостями самої споруди – *геометрично нелінійна система*.

Важливу роль у розрахунках споруд відіграє *принцип локальності ефекту самоврівноважених сил* – *принцип Сен-Венана*. Зокрема, на підставі цього принципу, при малих порівняно з розмірами тіла зонах дії розподіленого навантаження, останнє може бути зображене у вигляді навантаження, розподіленого вздовж лінії, або зосередженої сили, що діє в одній точці.

З припущення щодо мализни переміщень випливає можливість застосування *розрахунку за недеформованою схемою*.

Суть цього розрахунку покажемо на прикладі системи, зображеної на рис. 16. Внаслідок дії навантаження точки системи змінюють своє взаємне розташування за рахунок деформації її елементів. Отже, стержні AC та BC під впливом навантаження займуть нове положення AC' та BC' . При цьому кут нахилу стержнів зміниться на величину $\Delta\alpha$. З умови рівноваги такої деформованої системи зусилля в стержнях:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin(\alpha + \Delta\alpha)}. \quad (5)$$

На підставі припущення щодо мализни переміщень останні є величинами другого порядку мализни відносно геометричних розмірів системи. Тоді в розглянутій системі $\Delta\alpha \ll \alpha$ й у виразі (5) можна взяти $\sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \sin\alpha$. Така заміна означає, що обчислення зусиль можна здійснити без урахування зміни геометрії системи – за недеформованою схемою. Зрозуміло, цей висновок справедливий лише в межах дії припущення про мализну переміщень.

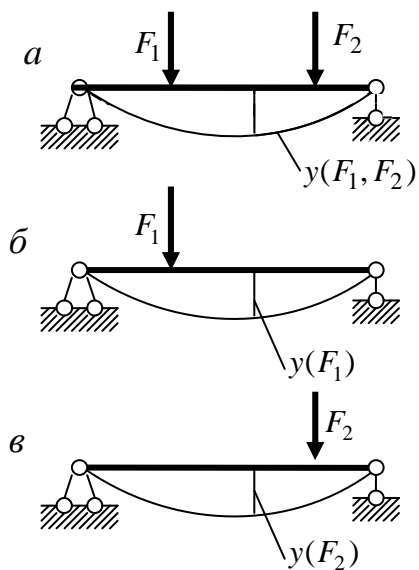


Рис. 15

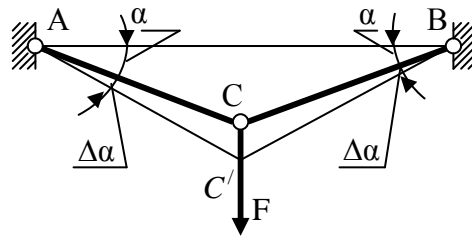


Рис. 16

Запитання для самоконтролю

1. Що таке будівельна механіка, чим вона відрізняється від опору матеріалів та інших суміжних дисциплін?
2. Що таке розрахункова схема споруди? Якими міркуваннями керуються при її виборі?
3. З яких елементів може складатися споруда?
4. Як з'єднуються між собою окремі стержні плоскої споруди?
5. Як розрізняються споруди залежно від того, яким чином з'єднуються стержні?
6. Що таке кратний шарнір?
7. Назвіть види опор плоских споруд. Які їх кінематичні й статичні властивості?
8. Наведіть класифікацію навантажень.
9. Які інші впливи можуть діяти на споруду?
10. Що називають кількістю ступенів свободи споруди?
11. Дайте визначення геометрично незмінюваної системи.
12. Дайте визначення геометрично змінюваної системи.
13. Чому при перевірці геометричної незмінюваності число ступенів свободи споруди можна визначати за умов припущення про абсолютну жорсткість окремих її елементів?
14. Як визначити кількість в'язей у з'єднанні дисків або в опорі?
15. Яка з формул (1) чи (2) є більш загальною?
16. Як геометрична незмінюваність споруди залежить від числа ступенів свободи?
17. Чому умова $W=0$ є недостатньою для геометричної незмінюваності системи?
18. У чому суть статичного методу перевірки геометричної незмінюваності?
19. Яка система є миттєво змінюваною?
20. Наведіть статичні та геометричні ознаки миттєвої змінюваності.
21. Які припущення щодо властивостей матеріалу застосовують у будівельній механіці?
22. Яка система є лінійно деформованою?
23. Що являє собою розрахунок за недеформованою схемою?

2. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ

Для визначення зусиль у статично визначуваних системах застосовують такі методи: метод перерізів, метод заміни в'язей та кінематичний метод. Перші два методи використовують рівняння рівноваги, тобто є статичними методами.

2.1. Метод перерізів

Цей метод є одним із найпоширеніших методів визначення зусиль у статично визначуваних системах. Застосування методу перерізів здійснюється в такій послідовності:

- система розрізається на дві частини;
- одна із частин відкидається, її дія на залишену частину замінюється внутрішніми зусиллями;
- складаються рівняння рівноваги залишеної частини під дією зовнішніх сил та внутрішніх зусиль;
- розв'язанням рівнянь рівноваги знаходяться шукані внутрішні зусилля.

Залежно від форми перерізу та розташування невідомих зусиль розрізняють такі основні способи застосування методу перерізів:

- *спосіб вирізання вузлів*, коли лінії дії всіх зусиль перетинаються в одній точці. Оскільки для такої системи сил незалежними є два рівняння рівноваги, розв'язання їх можливе, якщо серед цих зусиль невідомих не більше двох. Зазвичай у якості рівнянь рівноваги застосовують умови рівності нулю суми проекцій сил на координатні осі;
- *спосіб моментної точки (спосіб Риттера)*, коли лінії дії всіх невідомих зусиль, крім шуканого, перетинаються в одній точці. Тоді умова рівності нулю суми моментів сил відносно цієї – *моментної - точки* дає рівняння, що буде містити, крім відомих зовнішніх сил, лише одне невідоме – шукане зусилля. Його можна буде визначити розв'язанням цього рівняння;
- *спосіб проекцій*, коли всі невідомі зусилля, крім шуканого, паралельні один одному. У такому разі умова рівності нулю суми проекцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль, дає рівняння, у яке, крім відомих зовнішніх сил, увійде лише одне невідоме – шукане зусилля.

2.2. Кінематичний метод

Кінематичний метод ґрунтується на *принципі можливих переміщень*. За цим принципом для системи, що знаходиться в рівновазі, сума робіт усіх її сил на нескінченно малих можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Можливими називають такі переміщення, яким не перешкоджають накладені на систему в'язі й які відбуваються у фіксований момент часу. Для лінійно деформованих систем замість нескінченно малих можна розглядати малі скінченні переміщення, наприклад, переміщення від довільного навантаження.

Застосування кінематичного методу покажемо на прикладі визначення реакції R_B для балки, наведеної на рис.16,а.

Відкинемо в'язь, у якій виникає ця реакція, тобто опору B , і замінимо її дію реакцією - R_B . Оскільки задана балка є статично визначуваною, відкидання в'язі перетворює її на механізм з одним ступенем вільності. Якщо реакція у відкинутій в'язі відповідає вихідній балці, механізм знаходиться в рівновазі й для нього можна застосувати принцип можливих переміщень. Оскільки розрахунок виконується за недеформованою схемою, можливі переміщення цього механізму відповідають повороту балки як абсолютно жорсткого тіла навколо шарніра в точці A . Ці можливі переміщення наведені тонкою лінією на рис. 16,а. Складаємо рівняння робіт сил, що діють на механізм, на отриманих переміщеннях:

$$R_B \Delta_b - F \Delta_f = 0 \quad (6)$$

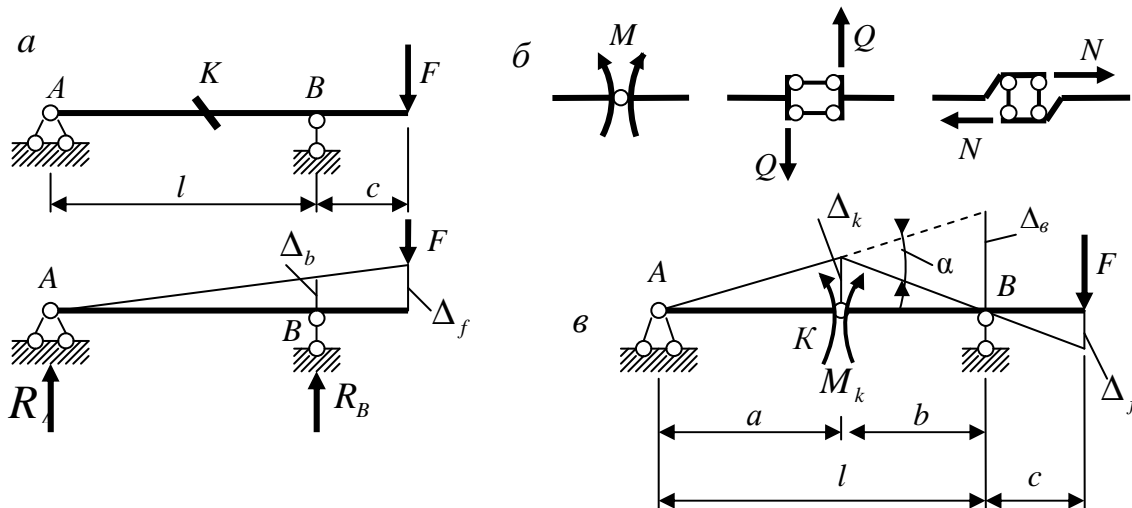


Рис. 16

Ординати переміщень механізму утворюють епюру переміщень. За цією епюрою складаємо рівняння подоби трикутників:

$$\frac{\Delta_f}{l+c} = \frac{\Delta_b}{l},$$

звідки $\Delta_f = \frac{l+c}{l} \cdot \Delta_b$. Після підстановки цього виразу в (6) та скорочення на Δ_b

отримаємо: $R_B = F \frac{l+c}{l}$.

Отже, застосування кінематичного методу для визначення зусиль виконується в такій послідовності:

- видалити в'язь, у якій діє шукане зусилля, перетворивши таким чином задану статично визначувану систему на механізм;
- замість видаленої в'язі прикласти шукане зусилля;
- надати механізму можливе переміщення;
- записати рівняння нулю роботи сил, що діють на механізм, на отриманих можливих переміщеннях;
- розв'язати рівняння робіт відносно шуканого зусилля, виразивши співвідношення між переміщеннями на основі епюри переміщень.

Видалення в'язей, у яких діють внутрішні зусилля, можна здійснити так, як наведено на рис. 16,б.

Застосування кінематичного методу для визначення внутрішніх зусиль наведено на рис. 16,в на прикладі визначення згинаючого моменту в перерізі K балки. Поставивши шарнір у перерізі K , одержуємо механізм, що складається із двох частин: AK та KB . Можливі переміщення цього механізму наведені на рисунку тонкими лініями. Рівняння робіт сил механізму на отриманих переміщеннях буде таким:

$$M_K \alpha + F \Delta_f = 0. \quad (7)$$

Ураховуючи мализну переміщень, з епюри переміщень механізму отримуємо:

$$\Delta_B = b\alpha; \Delta_K = \Delta_B \frac{a}{l} = \frac{ab}{l} \alpha; \Delta_f = \Delta_K \frac{c}{b} = \frac{ac}{l} \alpha.$$

Підставивши одержане значення Δ_f в (7) після скорочення на α , одержуємо:

$$M_K = -F \frac{ac}{l}.$$

2.3. Метод заміни в'язей

Цей метод може бути ефективним у деяких задачах, коли застосування методу перерізів потребує складання та сумісного розв'язання багатьох рівнянь.

Застосування методу покажемо на прикладі визначення зусиль у системі, наведеній на рис. 17,а.

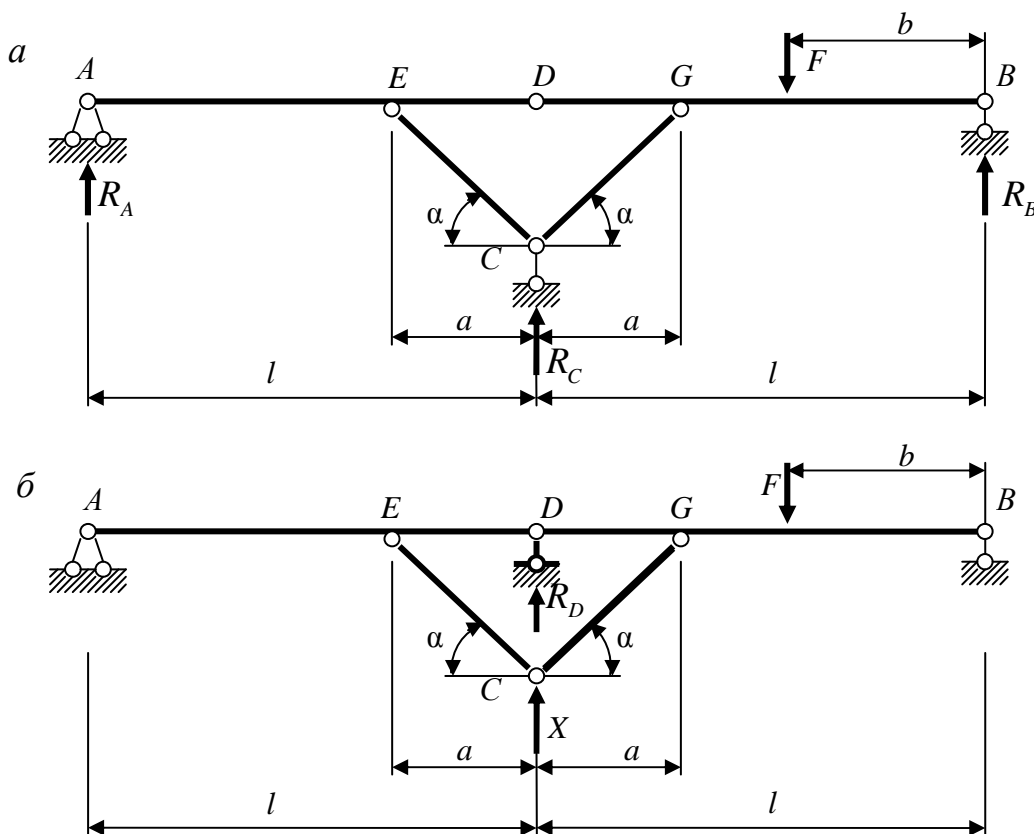


Рис. 17

Розрахунок цієї системи методом перерізів призводить до необхідності запису п'яти рівнянь рівноваги для визначення опорних реакцій і далі - сумісного розв'язання цих рівнянь.

Перетворимо систему так, щоб нова система була зручніша для розрахунку. Для цього відкинемо опору в точці C і замінимо її реакцією X . Щоб одержана система залишилась геометрично незмінюваною, поставимо опору в точці D . Ця – *перетворена* – система буде еквівалентною заданій, якщо поставити вимогу, щоб реакція в доданій опорі дорівнювала нулю:

$$R_D = 0. \quad (8)$$

Виконаємо розрахунок перетвореної системи окремо на дію заданого навантаження й окремо на дію сили $\bar{X} = 1$. Зусилля від заданого навантаження будемо позначати індексом f , а зусилля від сили X - індексом x . Риска над позначенням зусилля означатиме, що воно викликане дією одиничної сили. Отже, реакція в опорі D від заданого навантаження - $R_{D,f}$, а від одиничної сили \bar{X} - $\bar{R}_{D,x}$. Для лінійно деформованої системи $R_D = R_{D,x} + R_{D,f}$, $R_{D,x} = \bar{R}_{D,x} \cdot X$. Тепер умову (8) можна записати так:

$$\bar{R}_{D,x} X + R_{D,f} = 0.$$

Звідси отримуємо значення X , а отже, реакцію в опорі C заданої системи:

$$X = R_C = -\frac{R_{D,f}}{\bar{R}_{D,x}}.$$

Наведемо розрахунок розглянутої системи при $a = l/4$; $b = l/2$; $\alpha = 45^\circ$.

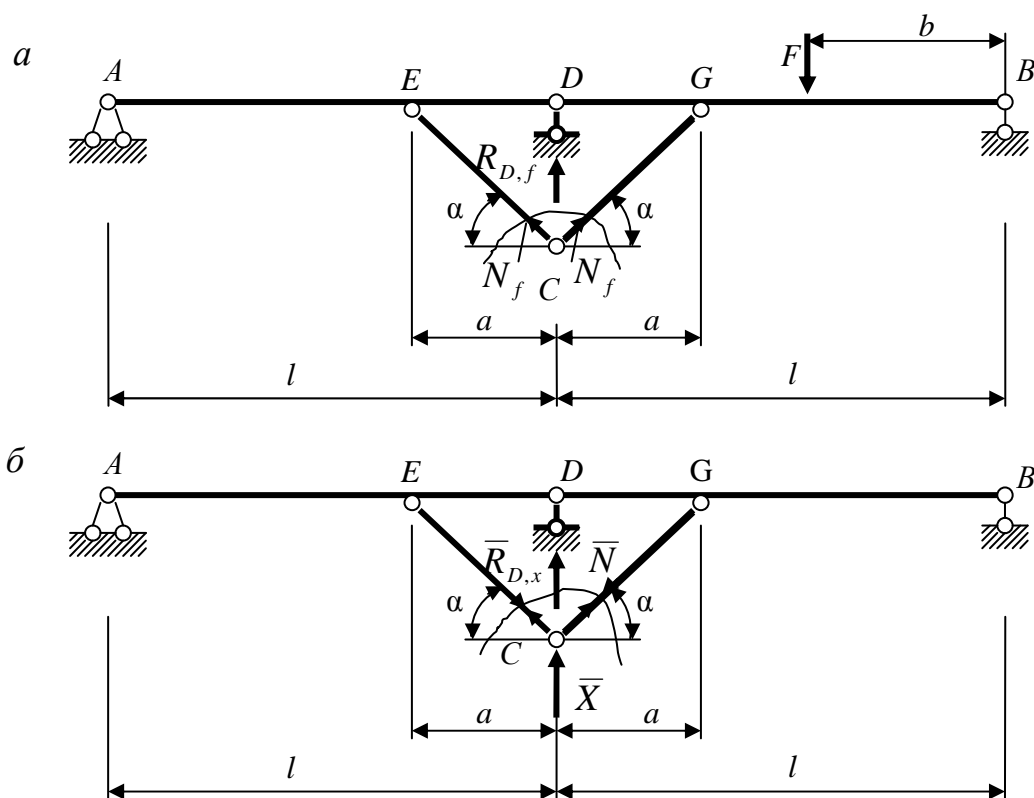


Рис. 18

При дії навантаження (рис. 18,а) з рівноваги вузла С випливає рівність нулю зусиль N_f у підкосах CE та CG . Отже, при цьому балка AD вільна від навантаження і реакція у опорі D виникає лише від сили F на балці DG . З умови рівності нулю моменту сил на балці DB $\sum M_B = F \cdot b - R_B \cdot l = 0$ одержимо

$$R_{D,f} = F \frac{b}{l} = 0,5F.$$

При дії одиничної сили \bar{X} з рівноваги вузла C випливає $\bar{N}_l = -\frac{\bar{X}}{2 \cdot \sin \alpha} = -\frac{1}{2 \cdot 0,707} = -0,707$. Кожна з балок AD та DG знаходиться під дією зусиль \bar{N}_x у підкосах. На підставі симетрії реакція у опорі D від кожної з цих балок однакова і становить $0,5 \bar{R}_{D,x}$. Розглядаючи рівновагу, наприклад, балки DB , одержимо:

$$\begin{aligned} \sum M_D = \bar{N}_x \cdot \sin \alpha \cdot (l - a) - 0,5 \bar{R}_{D,x} \cdot l = 0; \text{ звідки } \bar{R}_{D,x} &= \frac{\bar{N}_x \cdot \sin \alpha \cdot (l - a)}{0,5l} = \\ &= \frac{-0,707 \cdot 0,707 \cdot (l - 0,25l)}{0,5l} = -0,75. \end{aligned}$$

$$\text{Тепер з (8) маємо: } X = -\frac{0,5F}{-0,75} = 0,667F = R_c.$$

Після визначення реакції R_c неважко знайти й інші реакції, а також будь-які зусилля S у заданій системі, застосовуючи принцип незалежності дії сил:

$$S = S_f + \bar{S}_x X,$$

де S_f - відповідне зусилля в перетвореній системі від дії заданого навантаження;

\bar{S}_x - відповідне зусилля в перетвореній системі від дії сили $\bar{X} = 1$.

У складніших випадках може знадобитись заміна не однієї, а кількох в'язей.

Запитання для самоконтролю

1. Які методи застосовують для визначення зусиль у статично визначуваних системах?
2. У чому суть методу перерізів?
3. Яким методом одержані правила визначення згинаючих моментів та поперечних сил у балці?
4. Наведіть способи запису рівнянь рівноваги в методі перерізів. Як вони застосовуються?
5. Як обирається моментна точка?
6. Наведіть формулювання принципу можливих переміщень.
7. Які переміщення називають можливими?
8. Наведіть послідовність застосування кінематичного методу для визначення зусиль.
9. Як усуваються в'язі, у яких діють внутрішні зусилля?
10. У чому суть методу заміни в'язей?
11. З якої умови визначають зусилля у відкинутих в'язях?
12. Як визначають зусилля в заданій системі після визначення зусиль у відкинутих в'язях?

3. СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ РАМИ

3.1. Основні поняття. Класифікація рам

Рамою називають стержневу систему, елементи (стержні) якої жорстко з'єднані між собою в усіх або в частині вузлів.

Рами в будівництві застосовуються часто, особливо в зв'язку з використанням залізобетонних конструкцій. Вони широко застосовуються в каркасах будівель, у підмурках обладнання, можуть утворювати окремі елементи конструкції: рамні стояки, безроскісні ферми й т. ін.

Рами можуть бути одно- та багатоповерховими. Найбільш складними є рами промислових споруд.

Рами, у яких усі реакції та внутрішні зусилля можна визначити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги, називають *статично визначуваними*.

Основними елементами рам (рис. 19) є стояки й ригелі. *Стояком* називають вертикальний або близький до вертикального стержень, наприклад, стержень AC (рис. 19,а). *Ригелем* називають горизонтальний чи близький до нього за нахилом стержень, наприклад, стержень CD (рис. 19,в).

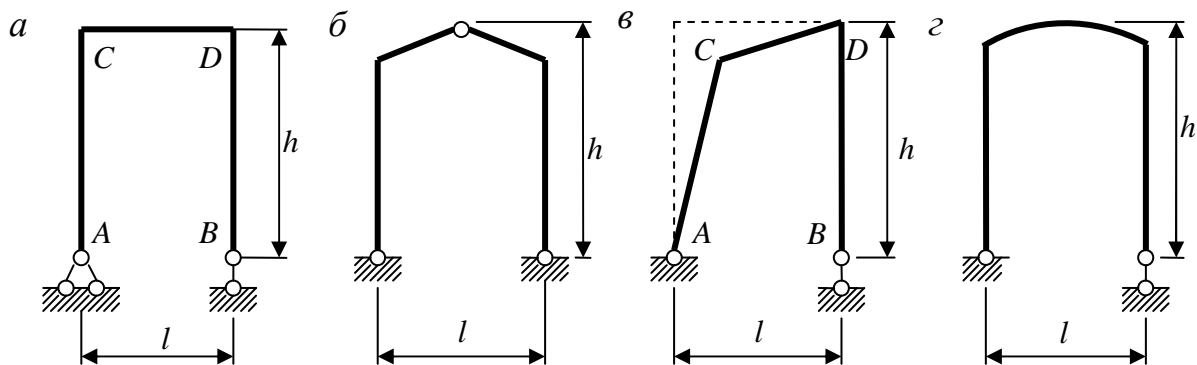


Рис. 19

Ригелі можуть бути прямолінійними, ламаного або криволінійного обрису (рис. 19,а...г). Відстань l між центрами опор називається прольотом, відстань h від центру опор до найбільш високої точки осі рами - висотою рами.

Рама, зображена на рис. 19,б, називається тришарнірною за кількістю опорних та проміжних шарнірів.

На рис. 20 наведені консольні балки з ламаними осями, які розраховуються так само, як і рами.

При дії навантаження в опорних закріпленнях рами виникають опорні реакції, а в кожному поперечному перерізі рами – внутрішні зусилля. Загалом в перерізах стержнів рами діють: *згинаючий момент M* , *поперечна або перерізуюча сила Q* та *поздовжня сила N* .

Правила визначення цих зусиль одержані в опорі матеріалів на підставі методу перерізів:

- *згинаючий момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, розташованих на одній із відсічених частин, відносно центру ваги перерізу.*

- поперечна сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на нормаль до осі стержня в перерізі.
- поздовжня сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на дотичну до осі стержня в перерізі.

Правила знаків для визначення цих внутрішніх зусиль наведені на рис. 21.

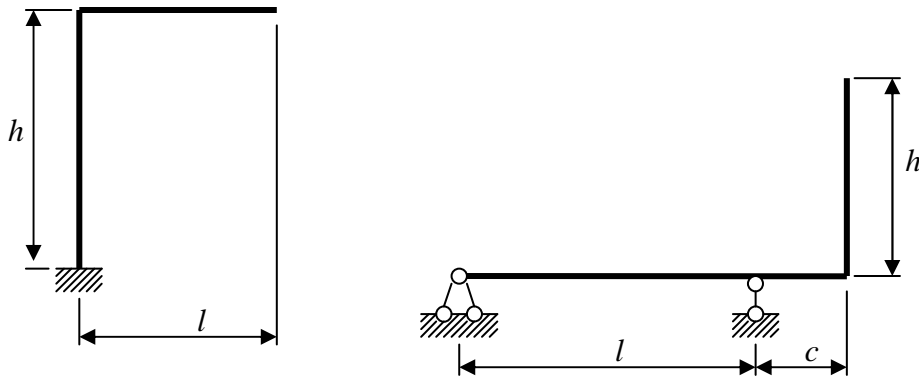


Рис. 20

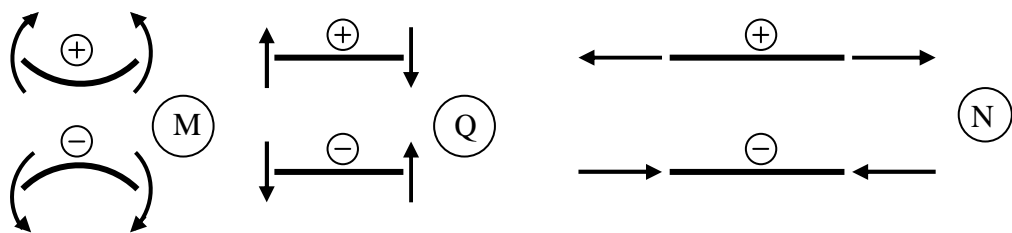


Рис. 21

3.2. Розрахунок рами

Основною метою розрахунку рами є обчислення опорних реакцій і побудова епюр внутрішніх зусиль.

Розглянемо приклад розрахунку рами, що зображена на рис. 22,а.

При визначенні опорних реакцій V_A , H_A , R_B бажано використовувати раціональні рівняння рівноваги, тобто такі, до кожного з яких входить лише одна із трьох реакцій.

Так, для визначення реакції R_B застосуємо спосіб моментної точки, якою є точка перетину ліній дії реакцій H_A та V_A , тобто т. А:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot \frac{l}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, R_B = \frac{3ql}{2}.$$

Для реакції H_A моментною точкою є точка перетину ліній дії реакцій V_A та R_B , тобто т. В':

$$\sum M_{B'} = 0, H_A \cdot \frac{l}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, H_A = \frac{3ql}{2}.$$

Реакцію V_A зручно визначити способом проекцій, оскільки інші дві реакції R_B та H_A паралельні одна одній: $\sum y = 0$; $V_A - q \cdot l = 0$; $V_A = q \cdot l$.

Для перевірки візьмемо суму моментів сил відносно т. D :

$$\sum M_D = 0; H_A \cdot h - V_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot \frac{l}{3} = \frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} - q \cdot l \cdot l - \frac{ql^2}{2} - \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

Якщо реакція отримана із знаком «мінус», це означає що її дійсний напрямок протилежний прийнятому.

Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль розіб'ємо раму на ділянки. Межами ділянок повинні бути: вузли рами, точки прикладання зосереджених сил та моментів, точки стрибкоподібної зміни інтенсивності розподіленого навантаження. У нашому прикладі таких ділянок три: AC, CD, DB .

Спочатку побудуємо *епюру згинаючих моментів*. Розглядаючи кожну ділянку рами, залежно від виду навантаження визначаємо обрис епюри: лінійний, якщо на ділянці відсутнє навантаження, і криволінійний при наявності на ділянці розподіленого навантаження (при рівномірному навантаженні епюра моментів окреслена за квадратною параболою). Залежно від обрису призначаємо кількість перерізів, за якими можна побудувати епюру: два для лінійної ділянки і три для криволінійної.

Для визначення знаків моментів на вертикальних стержнях раму слід повертати так, щоб ці стержні розташувались горизонтально. З цією метою оберемо будь-яку точку на рисунку рами і позначимо її «зірочкою» (рис. 22,а). Ця точка обирається довільно, бажано – між стояками та нижче всіх ригелів. Поворот рами будемо здійснювати так, щоб «зірочка» була розташована під стержнем, який розглядається.

Почнемо, наприклад, з *ділянки AC*. Розподілене навантаження на ній відсутнє, і епюра моментів повинна бути лінійною. Тому достатньо взяти два перерізи на кінцях ділянки.

Обернувши раму навколо «зірочки» за годинниковою стрілкою на 90° , маємо т. A розташовану на лівому кінці стержня і т. C – на правому. Позначатимемо моменти у перерізах, розташованих нескінченно близько до лівого та правого кінців індексами відповідно «*поч*» та «*кін*».

Для визначення згинаючого моменту в перерізі на початку стержня обираємо частину рами, розташовану ліворуч від перерізу як таку, на якій діє менше сил, ніж на правій. Відповідно до рис. 21 моменти, що обертають ліву частину за годинниковою стрілкою, будуть додатними, проти годинникової стрілки – від'ємними. Отже маємо:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} M = V_A \cdot 0 - H_A \cdot 0 = 0.$$

Зазначимо, що при визначенні згинаючого моменту за правими силами на рис. 21 додатними будуть моменти, що обертають раму проти годинникової стрілки. У цьому випадку обчислення моменту складніше:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot \frac{h}{2} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

При обчисленні згинаючого моменту в перерізі на кінці стержня також зручно розглянути ліву частину рами:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} = -ql^2.$$

Так само визначаємо згинаючі моменти на кінцях ділянки DB . Для визначення знаків моментів обертаємо раму на 90° проти годинникової стрілки. Згинаючі моменти у перерізах нескінченно близьких до лівого та правого кінців ділянки, відповідно до точок D та B , будуть такими:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot 0 = 0; \quad M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

На ділянці CD маємо розподілене навантаження, тому епюра M на ній буде криволінійною. Для побудови епюри одержимо згинаючі моменти на кінцях ділянки:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -ql^2, \quad M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

Додатково необхідно обчислити момент у середньому перерізі ділянки. Його можна обчислити за загальним правилом як суму моментів лівих або правих сил:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_{\text{ср}} = \sum_{\text{лів}} M = V_A \cdot \frac{l}{2} - H_A \cdot h - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - ql \cdot \frac{2l}{3} - \frac{ql^2}{2} = \frac{5ql^2}{8}.$$

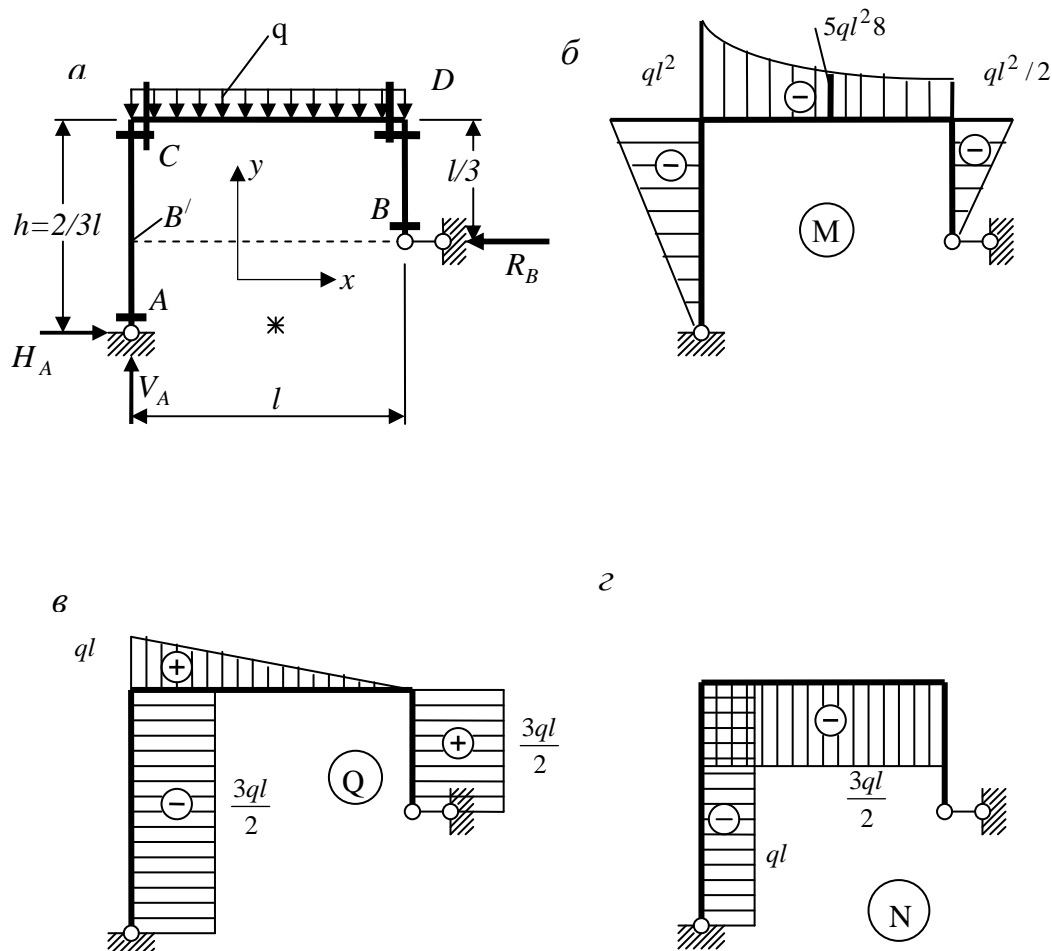


Рис. 22

Простіше можна обчислити момент у середньому перерізі будь-якої ділянки, на якій діє рівномірно розподілене навантаження, за формулою, одержаною на підставі принципу незалежності:

$$M_{cp} = \frac{M_{поч} + M_{кін}}{2} + \frac{ql^2}{8}. \quad (9)$$

Зазначимо, що у (9) згинаючі моменти на кінцях ділянки беруть з урахуванням їхніх знаків, а знак «плюс» перед другим доданком відповідає навантаженню, спрямованому донизу.

Отже, для цієї ділянки одержимо:

$$M_{cp} = \frac{-ql^2 - \frac{ql^2}{2}}{2} + \frac{ql^2}{8} = -\frac{5ql^2}{8}.$$

За одержаними значеннями на рис. 22,б побудовано епюру M . Нагадаємо, що додатні значення моментів відкладаються донизу. Отже, за таких правил побудови епюра завжди повинна бути розташована з боку розтягнутих волокон.

Побудову епюри поперечних сил виконуємо аналогічно.

Ділянка AC – при відсутності навантаження поперечна сила незмінна, тому для довільно розташованого перерізу визначаємо:

$$Q = \sum_{лів} x = -H_A = -\frac{3ql}{2}.$$

Так само на ділянці DB :

$$Q = \sum_{прав} x = R_B = \frac{3ql}{2}.$$

На ділянці CD при наявності рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила змінюється за лінійним законом. Отже, маємо:

$$Q_{поч} = \sum_{лів} y = V_A = ql, \quad Q_{кін} = \sum_{прав} y = 0.$$

Відкладаючи на стержнях рами додатні значення Q доверху, а від'ємні – донизу, одержимо епюру поперечних сил (рис. 22,в).

Визначення поперечних сил, особливо для складних рам, можна виконати інакше – за епюрою згинаючих моментів, використовуючи диференціальну залежність між поперечною силою та згинаючим моментом та значення балочної поперечної сили:

$$Q_{\frac{поч}{кін}} = \frac{M_{кін} - M_{поч}}{l} \pm \frac{ql}{2} \quad (10)$$

Зауважимо, що початок ділянки завжди приймаємо на лівому її кінці.

Наприклад, на ділянці CD маємо:

$$Q_{\frac{поч}{кін}} = \frac{-\frac{ql^2}{2} + ql^2}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} \pm \frac{ql}{2} = \begin{cases} ql, \\ 0 \end{cases}.$$

При визначенні *поздовжніх сил* слід зауважити, що поздовжня сила на ділянці (або й у межах усього стержня) не буде змінюватись, якщо навантаження діє перпендикулярно до осі стержня. Отже, у нашому прикладі:

$$N_{AC} = \sum_{лів} y = -V_A = -ql, \quad N_{DB} = \sum_{прав} y = 0, \quad N_{CD} = \sum_{прав} x = -R_B = -\frac{3ql}{2}.$$

Додатні поздовжні сили на епюрі N відкладаються на стержнях доверху, від'ємні - донизу (рис. 22,з).

Перевірка епюр на окремих стержнях виконується, як звичайно, за наявністю екстремумів, стрибків, перегинів. Крім того, перевіряється рівновага вузлів - окремо під дією згинаючих моментів (рис. 23,а) і окремо під дією поперечних та поздовжніх сил (рис. 23,б). При цьому напрям дії згинаючих моментів визначається за розташуванням розтягнутих волокон – з боку розташування згинаючих моментів на епюрі M (штрихові лінії на рис. 23,а). Дія додатних за знаком поперечних сил відповідає повороту вузла за годинниковою стрілкою, від'ємних – проти годинникової стрілки. Додатні поздовжні сили діють у напрямку від вузла, що відповідає розтягненню стержнів.

За рис. 23,а для вузла C маємо: $\sum M = ql^2 - ql^2 = 0$; для вузла D : $\sum M = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0$.

За рис. 23,б для вузла C одержимо: $\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0$; $\sum y = ql - ql = 0$ і для вузла D : $\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0$; $\sum y = 0$.

Отже, вузли рами знаходяться у рівновазі, епюри побудовані вірно.

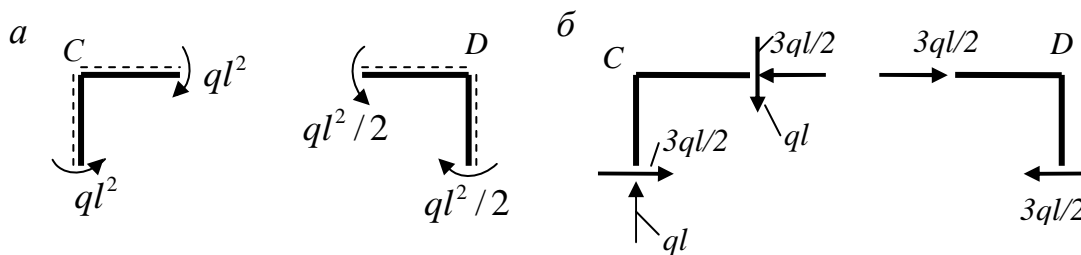


Рис. 23

Зазначимо, що для складних, особливо статично невизначуваних, рам умови рівноваги вузлів під дією поздовжніх та поперечних сил можна використовувати для визначення поздовжніх сил.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається рамою?
2. Як називаються окремі стержні рами?
3. Що є тришарнірною рамою?
4. Як визначаються реакції в опорах рами?
5. Наведіть правила визначення внутрішніх зусиль у перерізах стержнів рами.
6. Як залежить характер епюр внутрішніх зусиль на ділянках рами від виду навантаження?
7. З якої сторони стержня відкладаються ординати епюр згинаючих моментів?
8. Як перевіряється правильність побудови епюри моментів?
9. Як визначити напрям згинаючих моментів у вузлі?
10. Як можна визначити поперечні сили за епюрою згинаючих моментів?
11. Як можна визначити поздовжні сили з рівноваги вузлів?

4. СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ ФЕРМИ

4.1. Основні поняття. Класифікація ферм

Фермою називають конструкцію, розрахункова схема якої складається з прямих стержнів, з'єднаних між собою на кінцях шарнірами.

Стержні у вузлах реальної ферми (рис. 24,*а*) з'єднуються жорстко: зварюванням (рис. 24,*в*), на нютах або болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їх з'єднань несуттєво відбивається на роботі ферми. У зв'язку із цим у розрахунковій схемі ферми припускають, що в усіх вузлах знаходяться ідеальні шарніри (рис. 24,*б*).

У спорудах, елементами яких є ферми, зазвичай передбачають передачу навантаження у вузли ферм, тому їх стержні працюють тільки на розтяг-стиск. Ця обставина зумовлює більшу економічність ферм у порівнянні з балками за рахунок повнішого використання матеріалу при роботі стержня на розтяг. Дійсно, у перерізі розтягнутого стержня, на відміну від стержня, що згинається, нормальне напруження однакове в усіх точках, тому матеріал використовується повністю.

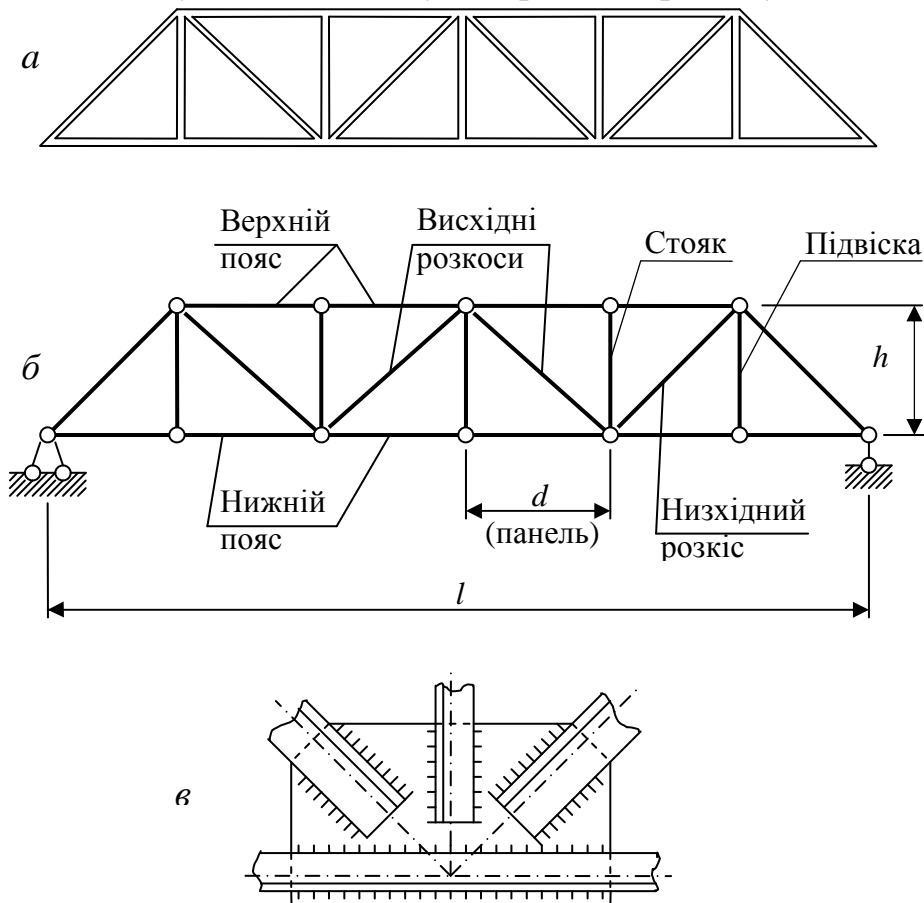


Рис. 24

Ідею виникнення ферм можна подати як розвиток уявлення про роботу стержня на згин. Як відомо, при роботі стержня на згин нормальне напруження в поперечному перерізі змінюється вздовж висоти за лінійним законом (рис. 25,*а*). Найбільш напруженими при цьому будуть крайні волокна, а матеріал середньої частини недовикористовується. Саме тому в балках намагаються більшу частину

матеріалу зосередити в поясах, максимально зменшуючи розміри іншої частини перерізу (стінки). Так виник двотавровий переріз, найбільш пристосований для роботи на згин (рис. 25,б).

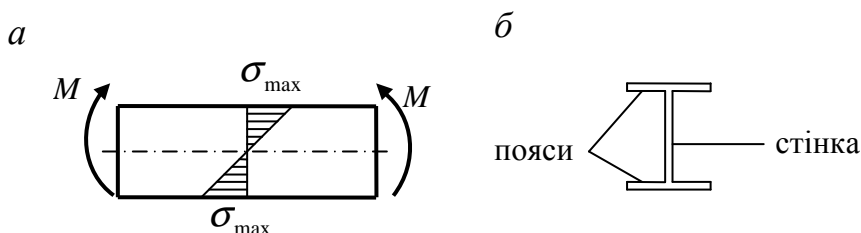


Рис. 25

При зростанні прольоту для сприйняття більших згинаючих моментів висоту перерізу доводиться збільшувати настільки, що витрати матеріалу на стінку балки стають надто великими. У цьому випадку вигідно перейти від суцільного перерізу до наскрізного, або гратчастого, коли замість суцільної балки конструкцію виготовляють у вигляді системи прямолінійних стержнів - ферм.

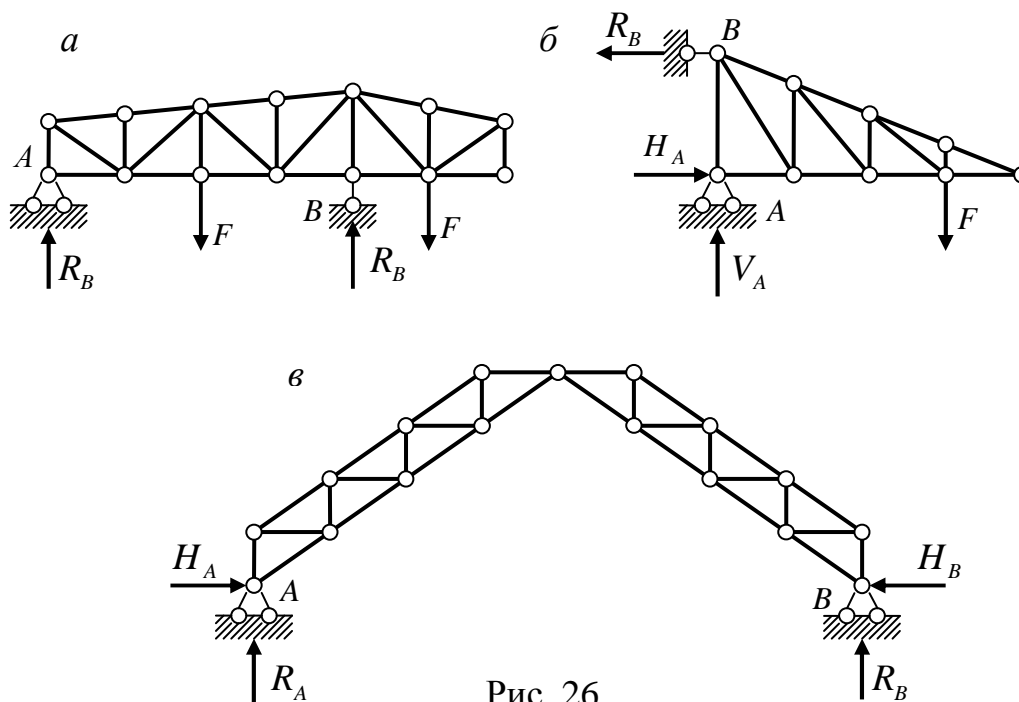


Рис. 26

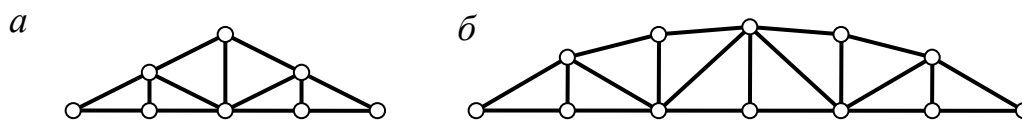


Рис.27

За розміщенням та характером роботи у фермі розрізняють *пояси* й *гратки*. Пояси складають стержні, які обмежують контур ферми зверху та знизу. Пояс, у якому прикладене навантаження, називають вантажним.

Гратки утворюються похилими елементами – *розкосами* та вертикальними – *стояками* і *підвісками* (рис. 24,б). Стояки працюють на стиск, а підвіски – на розтяг. Серед розкосів розрізняють *висхідні* та *низхідні* за напрямком руху вздовж розкосу

при пересуванні фермою від опор до середини прогону. Стояки та розкоси, розташовані біля опор, називають опорними.

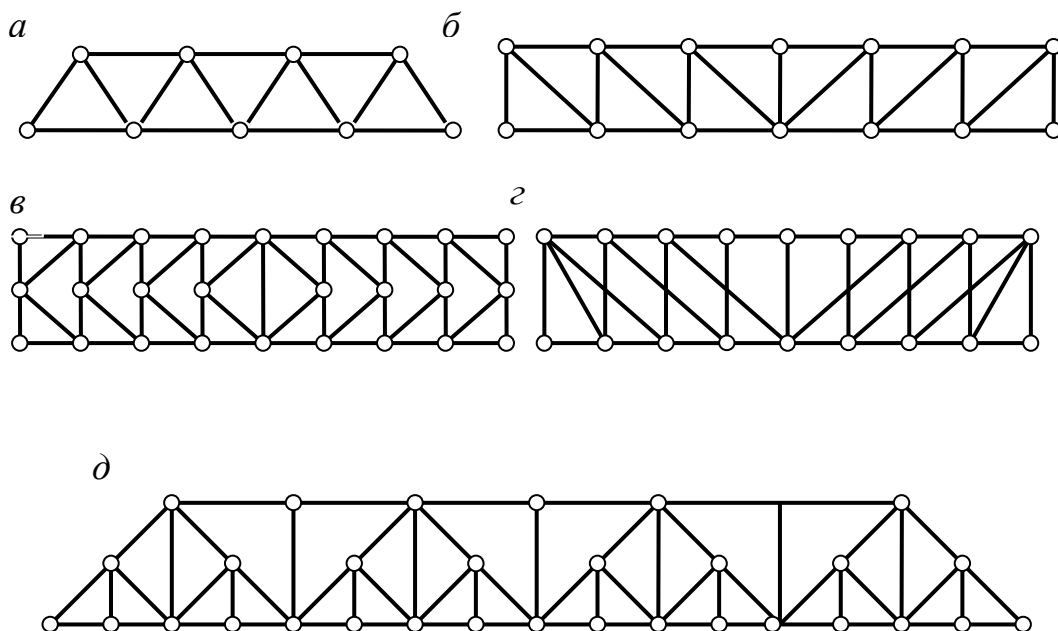


Рис. 28

Частину ферми, розташовану в межах між суміжними вузлами вантажного поясу, називають *панеллю*. Горизонтальну проекцію відстані між цими вузлами називають довжиною панелі й позначають d .

Ферми розрізняють за такими ознаками:

- за призначенням: *мостові* (ферми прогонових споруд мостів, мостових кранів), *кровокі* (ферми покриттів будов та споруд), *ферми каркасів* будов і споруд та ін., наприклад, ферми, що є частинами корпусу судна, літака, опори ЛЕП.
- за типом обтірання: *балкові* (рис. 26, а), у яких при вертикальному навантаженні виникають лише вертикальні реакції опор, *аркові* або *розпірні* (рис. 26, в), у яких при вертикальному навантаженні, крім вертикальних, виникають і горизонтальні реакції, а також *консольні* (рис. 26, б), у яких опори розташовані на одному з кінців ферми;
- за обрисом поясів: ферми з *паралельними поясами* (рис. 24, б та 28), із *трикутним* (рис. 27, а) та *полігональним* (рис. 27, б) обрисом;
- за системою ґраток: ферми з простими ґратками – *трикутними* (рис. 28, а), *розкісними* (рис. 28, б), *напіврозкісними* (рис. 28, в); ферми із складними ґратками – *двохрозкісні* (рис. 28, г), *багаторозкісні* та ін., ферми із складеними ґратками – *шпренгельні* (рис. 28, д) та інші ферми, в яких окремі стержні є ґратчастими, тобто *теж фермами*.

4.2. Розрахунок ферм

Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль у її стержнях. Для цього у статично визначуваних фермах найчастіше застосовують *метод перерізів*.

При розрахунках вручну для визначення зусилля важливо обрати зручний переріз та застосувати умову рівноваги так, щоб зменшити складність розрахунків.

Залежно від розміщення та конфігурації перерізу, а також від типу використаних рівнянь рівноваги розрізняють такі способи: *виризання вузлів, моментної точки (Ріттєра), проєкцій, сумісних перерізів, замкнутого перерізу*.

У комп'ютерних програмах для розрахунку ферм зручно використовувати спосіб виризання вузлів в універсальній формі.

4.2.1. Спосіб виризання вузлів.

Спосіб виризання вузлів у класичній формі застосовують для визначення зусиль у фермах, розрахункова схема яких може бути утворена послідовним приєднанням вузлів парами стержнів (рис. 29,а). У цьому випадку спершу проводять переріз, що відтинає двостержневий вузол, наприклад, вузол 1 (рис. 29,б) і записують його умови рівноваги:

$$\sum F_y = 0; N_{1-2} \sin \alpha + R_A = 0,$$

звідки

$$N_{1-2} = -R_A / \sin \alpha$$

та

$$\sum F_x = 0; N_{1-6} + N_{1-2} \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$N_{1-6} = R_A / \operatorname{tg} \alpha.$$

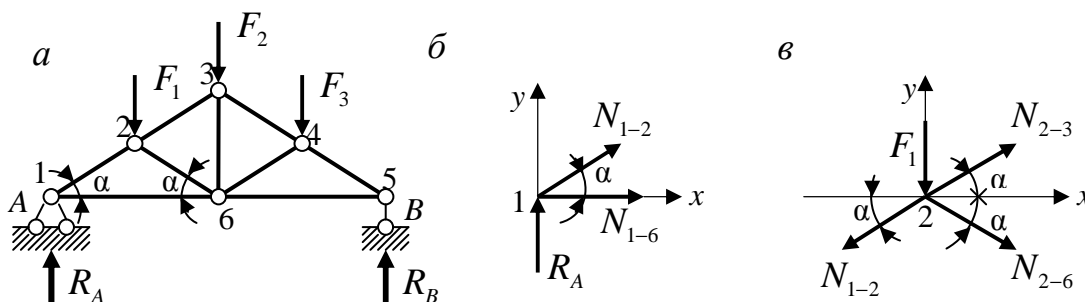


Рис. 29

Далі переходять до наступного вузла, в який входять два невідомих зусилля (вузол 2 на рис. 29,в), і записують умови рівноваги:

$$\sum F_x = 0; -N_{1-2} \cos \alpha + N_{2-6} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0; -N_{1-2} \sin \alpha + N_{2-3} \sin \alpha - N_{2-6} \sin \alpha - F_1 = 0.$$

Сумісним розв'язанням цих рівнянь з урахуванням раніше обчисленого зусилля N_{1-2} знаходять чергові зусилля: N_{2-3} , N_{2-6} . Далі розглядають наступні вузли в такій послідовності, щоб у кожному новому вузлі зустрічалося не більше двох невідомих зусиль. Так, для розглянутої ферми з рівноваги вузла 3 знаходять зусилля N_{3-4} , N_{3-6} , далі з вузла 6 - N_{4-6} , N_{5-6} і, нарешті, з вузла 4 або з вузла 5 знаходять зусилля N_{4-5} . Як бачимо, після обчислення всіх зусиль залишаються невикористаними деякі умови рівноваги (одне - у вузлі 5 або 4 і два - у вузлі 6). Ці умови рівноваги використовують для перевірки правильності розрахунків.

У окремих випадках заздалегідь можна зробити висновки щодо зусиль залежно від розташування у вузлі стержнів та навантаження. Ці випадки наведені на рис. 30.

1. Ненавантажений двостержневий вузол, у якому стержні не розташовані на одній прямій (рис. 30,а). З умов рівноваги вузла випливають рівності: $N_1 = 0$; $N_2 = 0$, тобто обидва стержні нульові.

2. Ненавантажений тристержневий вузол, у якому два стержні лежать на одній прямій, а третій не належить цій прямій (рис. 30,б). У такому вузлі $N_1 = N_2$; $N_3 = 0$, тобто зусилля у стержнях, розташованих на одній прямій, однакові, а третій стержень нульовий.

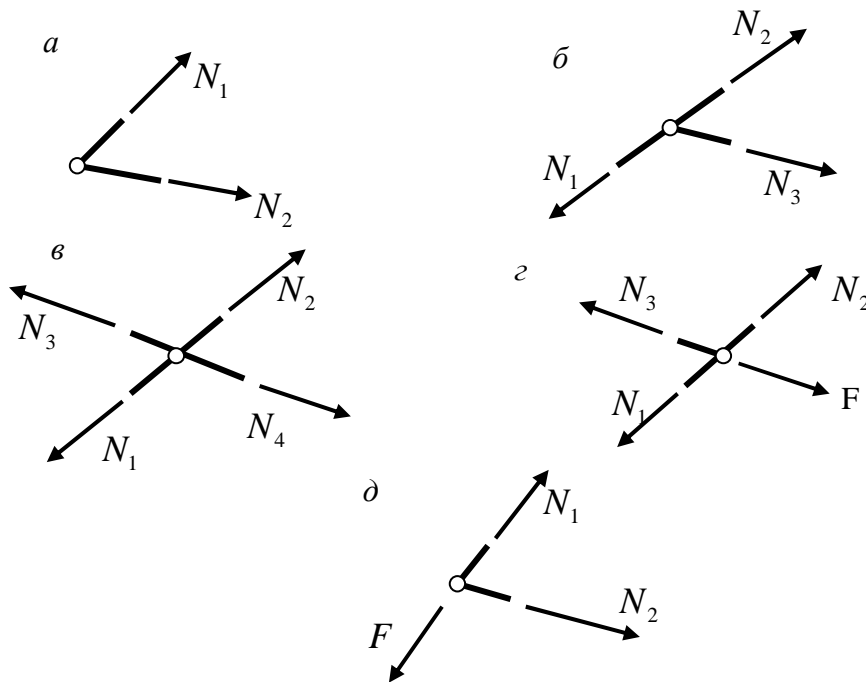


Рис. 30

3. Ненавантажений чотиристержневий вузол, у якому стержні по двоє розташовані на двох прямих, що перетинаються (рис. 30,в). Тут маємо: $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$. Отже, для такого вузла зусилля у стержнях, розташованих на одній прямій, однакові.
4. Тристержневий вузол, у якому два стержні не лежать на одній прямій, а навантаження прикладене вздовж третього стержня, який не лежить на цій прямій (рис. 30,з). У такому вузлі зусилля в стержнях, що розташовані на одній прямій, однакові ($N_1 = N_2$), а зусилля у третьому стержні дорівнює навантаженню ($N_3 = F$).
5. Двостержневий вузол, у якому стержні не лежать на одній прямій, а навантаження прикладене вздовж одного із стержнів (рис. 30,д). У цьому випадку зусилля в стержні, вздовж якого прикладене навантаження, дорівнює цьому навантаженню ($N_1 = F$), а другий стержень нульовий ($N_2 = 0$).

Зазначимо, що ознаки, за якими зусилля у наведених вище випадках обертаються на нуль, називають *ознаками нульових стержнів*.

Перевагою способу вирізання вузлів є одноманітність обчислення зусиль. До його вад відносять накопичення похибок розрахунку при переході від вузла до вузла. Наведений спосіб вирізання вузлів у класичній формі добре пристосований для ручного розрахунку. Але він не є універсальним, тому що непридатний для розрахунку ферм із довільним розташуванням стержнів. У зв'язку із цим для розрахунків на комп'ютері спосіб вирізання вузлів застосовується в більш загальній формі. Цей, *загальний* для статично визначуваних ферм, *спосіб* полягає в тому, що

рівняння рівноваги складаються для усіх вузлів ферми і далі розв'язується система сумісних рівнянь. Цей спосіб зручно навести в матричній формі. Для цього, пронумерувавши вузли ферми, складають такі матриці: матрицю координат вузлів ферми, вектор вузлових сил, матрицю з'єднань. Для прикладу розглянемо ферму, наведену на рис. 31. Початок координат оберемо у вузлі 1. Пронумеруємо стержні ферми для зручності послідовно за типами, наприклад, спочатку верхній (1, 2, 3, 4), потім нижній (5, 6, 7, 8) пояси, а далі - розкоси (9, 10) та стояки (11, 12, 13).

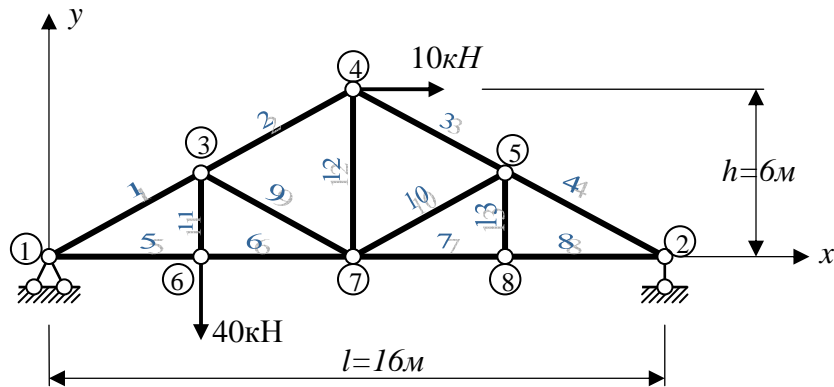


Рис. 31

Для подальшої зручності перетворення матриць вузли будемо нумерувати починаючи з шарнірно-нерухомої опори (номер 1), потім шарнірно-рухома опора (номер 2), далі - у довільній послідовності, наприклад, спочатку вузли верхнього поясу (3, 4, 5), потім – нижнього (6, 7, 8). Матриця \bar{X} координат вузлів ферми містить координати вузлів у обраній системі координат і для розглянутого прикладу має такий вигляд:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ 4 & 3 \\ 8 & 6 \\ 12 & 3 \\ 4 & 0 \\ 8 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розмір цієї матриці становить $n \times 2$, у нашому прикладі - 8×2 (n – кількість

вузлів ферми). Вектор вузлових сил $\vec{F}^* = \begin{bmatrix} \vec{F}_x^* \\ \vec{F}_y^* \end{bmatrix}$ містить два блоки: $\vec{F}_x^* = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ \vdots \\ F_{nx} \end{bmatrix}$ та

$\vec{F}_y^* = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \\ \vdots \\ F_{ny} \end{bmatrix}$, елементами яких є горизонтальні та вертикальні складові вузлових сил.

Для розглянутої ферми ці блоки мають такий вигляд:

$$\vec{F}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \vec{F}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця з'єднань \vec{S} містить інформацію про розташування стержнів між вузлами. Вона має розмір $m \times n$, у нашому випадку 13×8 (m – кількість стержнів ферми). Кожний рядок цієї матриці відповідає окремому стержню ферми. У цьому рядку елемент матриці повинен мати значення -1 у стовпчику, що відповідає вузлу на початку стержня (менший з номерів вузлів на кінцях стержня) та +1 у стовпчику, що відповідає вузлу на кінці стержня (більший з номерів вузлів на кінцях стержня). Інші елементи рядка повинні мати значення 0. Наприклад, у розглянутій фермі стержень 10 розташований між вузлами 5 та 7, отже, у рядку 10 матриці \vec{S} 5-тий елемент буде -1, 7-й +1, а інші елементи дорівнюють нулю. У цілому ця матриця має такий вигляд:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Після перемноження матриць \vec{S} та \vec{X} одержимо матрицю проекцій довжин стержнів:

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_m & \Delta y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 4 & -3 \\ -4 & 3 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & -3 \\ -4 & -3 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

наприклад, перший елемент 10-го рядка цієї матриці за правилами перемноження матриць буде дорівнювати сумі добутків елементів 10-го рядка матриці \vec{S} на елементи першого стовпчика матриці \vec{X} :

$$\Delta x_{10} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 12 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 12 = -4 \text{ м},$$

другий елемент цього самого рядка відповідно дорівнює сумі добутків 10-го рядка матриці \vec{S} на елементи другого стовпчика матриці \vec{X} : $\Delta y_{10} = -3 \text{ м}$.

Далі для кожного стержня визначаємо довжину - $l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ та тригонометричні функції кута нахилу до осі x : $\cos \alpha_i = \Delta x_i / l_i$, $\sin \alpha_i = \Delta y_i / l_i$. Наприклад, для 10-го стержня розглянутої ферми одержимо: $l_{10} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5 \text{ м}$; $\cos \alpha_{10} = -4 / 5 = -0,8$; $\sin \alpha_{10} = -3 / 5 = -0,6$.

Так ми отримаємо ряд значень косинусів кута нахилу стержнів:

$$\vec{C}_c = [0,8 \ 0,8 \ 0,8 \ -0,8 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0,8 \ -0,8 \ 0 \ 0 \ 0]$$

та синусів:

$$\vec{C}_s = [0,6 \ 0,6 \ -0,6 \ 0,6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,6 \ -0,6 \ -1 \ -1 \ -1].$$

Тепер формуємо проектуючу блочну матрицю $\vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{P}_x \\ \vec{P}_y \end{bmatrix}$. Блок \vec{P}_x у

кожному рядку містить коефіцієнти при зусиллях у проекціях на вісь x зусиль відповідного вузла ферми. Аналогічно блок \vec{P}_y - коефіцієнти при зусиллях у проекціях на вісь y .

Спочатку одержимо матриці:

$\vec{P}_x^* = -\vec{S}^T \vec{C}_c^\partial$ та $\vec{P}_y^* = -\vec{S}^T \vec{C}_s^\partial$, де верхній індекс « T » означає операцію транспонування матриці, а індекс « ∂ » - перетворення відповідного вектора-рядка у діагональну матрицю. Тобто для нашого прикладу маємо:

$$\vec{C}_c^\partial = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{C}_s^\theta = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Після відповідних перемножень матриць одержимо:

$$\vec{P}_x^* = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{P}_y^* = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З одержаних матриць вилучимо рядки, що відповідають проекціям сил у опорних вузлах, тобто у нашому прикладі перший рядок (проекція на вісь x у вузлі 1) матриці \vec{P}_x^* та перший і другий рядки (проекції на вісь y у вузлах 1 та 2) матриці \vec{P}_y^* . Одержані після вилучення цих рядків матриці є матрицями \vec{P}_x та \vec{P}_y , що входять як блоки до проектуючої матриці \vec{P} . Отже, у розглянутому прикладі проектуюча матриця має такий вигляд:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -0,8 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,6 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно вилученням відповідних елементів векторів \vec{F}_x^* та \vec{F}_y^* одержимо відповідно вектори \vec{F}_x , \vec{F}_y та вектор вузлових навантажень $\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \end{bmatrix}$, який для розглянутої ферми для зручності розташування наведений у транспонованому вигляді: $\vec{F}^T = [0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -40 \ 0 \ 0]$.

Тепер рівняння рівноваги вузлів ферми набудуть такого вигляду:

$$\bar{P} \cdot \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}, \quad (11)$$

де: $\vec{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}$ - вектор зусиль у стержнях ферми; $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ - нульовий вектор.

Розв'язання матричного рівняння рівноваги дає шуканий вектор зусиль у стержнях ферми: $\vec{N} = -\bar{P}^{-1} \cdot \vec{F}$, де індекс -1 означає операцію обернення матриці.

Для розглянутої ферми маємо:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -43.75 \\ -10.42 \\ -22.92 \\ -22.92 \\ 45 \\ 45 \\ 18.33 \\ 18.33 \\ -33.33 \\ 0 \\ 40 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Як бачимо, здійснення розрахунків загальним способом вирізання вузлів добре пристосоване для розрахунків на комп'ютері.

4.2.2. Спосіб моментної точки та спосіб проєкцій. Розподіл зусиль у стержнях балкової ферми.

При обчисленні поодиноких зусиль у стержнях ферми зручно користуватися способом моментної точки (Ріттера) й способом проєкцій. Їх застосування

розглянемо на прикладі балкової ферми із трикутними ґратками з підвісками (рис. 32,а).

Визначивши опорні реакції з умов рівноваги ферми, поставимо за мету визначити зусилля в стержнях четвертої зліва панелі. Для обчислення цих зусиль проведемо наскрізний переріз I-I так, щоб він проходив через три стержня, і розглянемо рівновагу правої частини ферми.

При обчисленні зусилля N_1 звернемо увагу на те, що інші розрізані стержні (зусилля N_2, N_3) перетинаються в точці m_1 . Ця точка є моментною (Ріттера) для зусилля N_1 , отже, застосуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_{m_1} = 0, R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0. \quad (12)$$

Розв'язавши рівняння (11), знайдемо шукане зусилля:

$$N_1 = 7,5d/h.$$

Аналогічно застосуємо спосіб моментної точки для обчислення зусилля N_2 (моментна точка m_2 знаходиться на перетині зусиль N_1 та N_3):

$$\sum M_{m_2} = 0; R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) + N \cdot h = 0. \quad (13)$$

Відзначимо, що моментна точка не завжди знаходиться у вузлі ферми. Наприклад, для визначення зусилля N у розкосі третьої панелі ферми, наведеної на рис. 32,в проведено переріз I-I. Розрізані при цьому стержні поясів не паралельні один одному й при продовженні перетинаються в точці m . Тоді маємо:

$$\sum M_m = 0; R_A \cdot a - F(a + d) - F(a - 2d) + N \cdot r = 0,$$

звідки
$$N = -\frac{R_A \cdot a - F(2a + 3d)}{r} = -\frac{F(1,5a - 3d)}{r}.$$

Обчислення зусилля N_3 раціонально виконати способом проекцій, оскільки інші розрізані стержні (зусилля N_1 та N_2) паралельні один одному. Для цього спроекуємо праві сили на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль:

$$\sum y = 0, R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha = 0. \quad (14)$$

Звідси маємо $N_3 = F/(2 \sin \alpha)$.

Отже, відзначимо, що в тих випадках, коли можна провести наскрізний переріз через три стержня, для визначення зусиль у них завжди раціонально скористатися одним зі способів – моментної точки або проекцій. Якщо зусилля у двох перерізанних стержнях перетинаються при продовженні, ця точка перетину є моментною точкою для зусилля у третьому стержні (спосіб моментної точки). Якщо зусилля у двох стержнях паралельні одне одному, для визначення третього зусилля беруть суму проекцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль (спосіб проекцій).

Зазначимо, що наведені способи раціонально застосовувати й у тих випадках, коли наскрізний переріз перетинає більше трьох стержнів, але усі стержні, крім одного, перетинаються в одній точці або паралельні один одному.

Проаналізуємо характер розподілу зусиль в стержнях наведеної на рис. 32,а балкової ферми.

Для цього розглянемо балку (рис. 32,б) однакового з фермою прогону, завантажену тим самим навантаженням. Опорні реакції цієї балки співпадають

з реакціями вихідної ферми. Внутрішні зусилля в перерізах балки будемо називати балковими: M^0 - балковий згинаючий момент і Q^0 - балкова поперечна сила. Визначимо балковий згинаючий момент у перерізі m_1 :

$$M_{m_1}^0 = R_A \cdot 3d - F(2d + d). \quad (15)$$

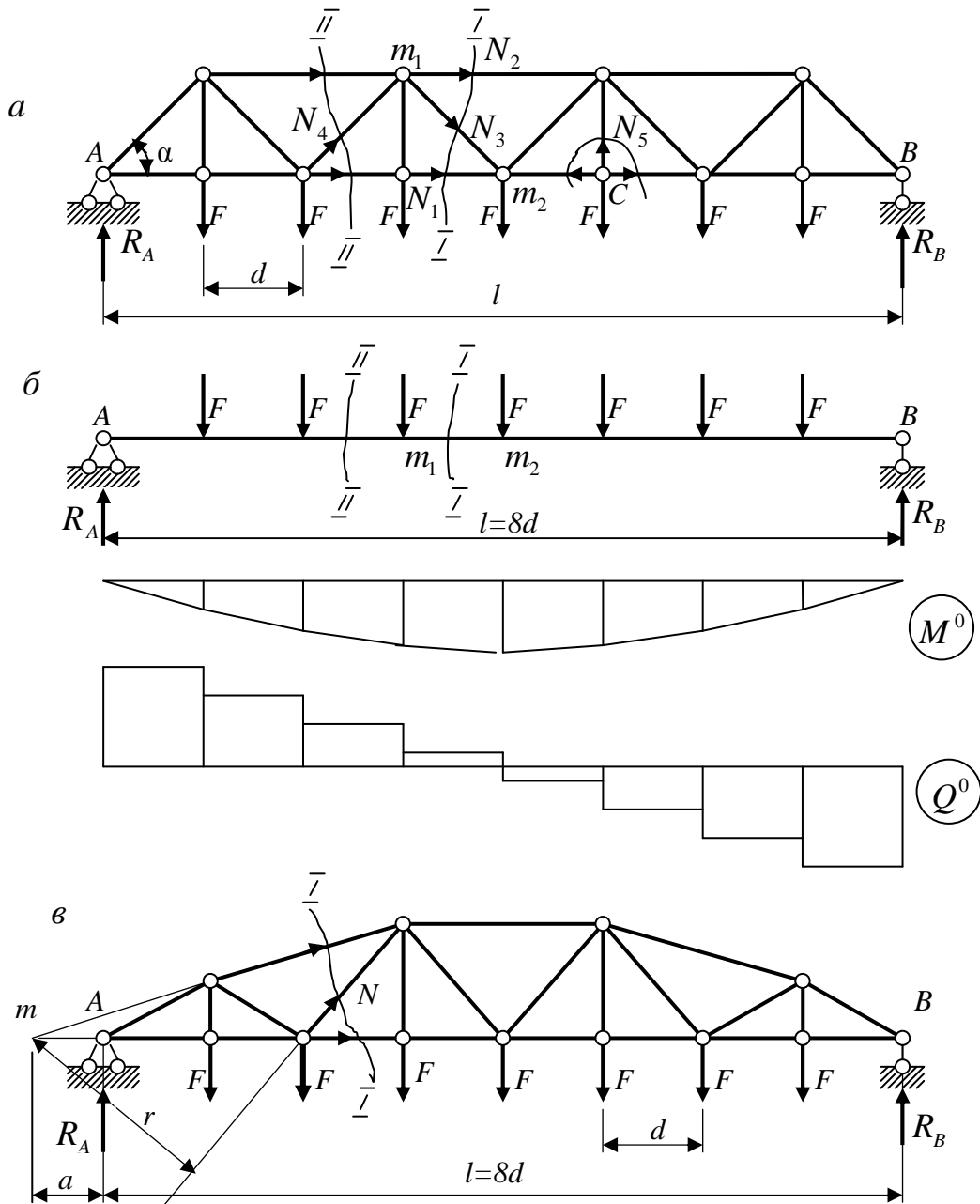


Рис. 32

Замінивши перші два доданки у рівнянні (12) співвідношенням (15), одержимо $M_{m_1}^0 - N_1 \cdot h = 0$, звідки

$$N_1 = M_{m_1}^0 / h. \quad (16)$$

Аналогічно, використавши вираз для балкового моменту у перерізі m_2 і замінивши ним момент вертикальних сил у (13), одержимо: $M_{m_2}^0 + N_2 \cdot h = 0$, звідки

$$N_2 = -M_{m_2}^o / h. \quad (17)$$

Зовнішні сили, що входять у рівняння (14), можна виразити через балкові поперечні сили. Дійсно, за рис. 32,б $Q_I^o = R_A - 3F$, і рівняння (15) набуває вигляду: $Q_I^o - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$, звідки $N_3 = Q_I^o / \sin \alpha$. (18)

Якщо виконати таку саму послідовність обчислень для зусилля N_4 (перетин II-II), отримаємо аналогічний вираз:

$$N_4 = -Q_{II}^o / \sin \alpha. \quad (19)$$

Аналіз виразів (16), (17) та (18), (19) дозволяє зробити такі висновки відносно роботи елементів балкових ферм:

- зусилля в поясах за абсолютною величиною зростають від опор до середини прогону, наслідуючи закон зміни балкових згинаючих моментів (рис. 32,б), нижній пояс зазнає розтягу, верхній – стиску;
- зусилля в розкосах за абсолютною величиною зменшуються від опор до середини прогону відповідно до зміни балочних поперечних сил (рис. 32,б), низхідні розкоси зазнають розтяг, висхідні – стиск.

Завершуючи аналіз розподілу зусиль у досліджуваній фермі, визначимо зусилля в підвісці N_5 . Неважко побачити, що вузол С, до якого входить підвіска, відповідає окремому випадку на рис. 30,з: $N_5 = F$. Очевидно, що всі підвіски працюють в однакових умовах – вони розтягнуті силою, прикладеною у відповідному вузлі нижнього поясу.

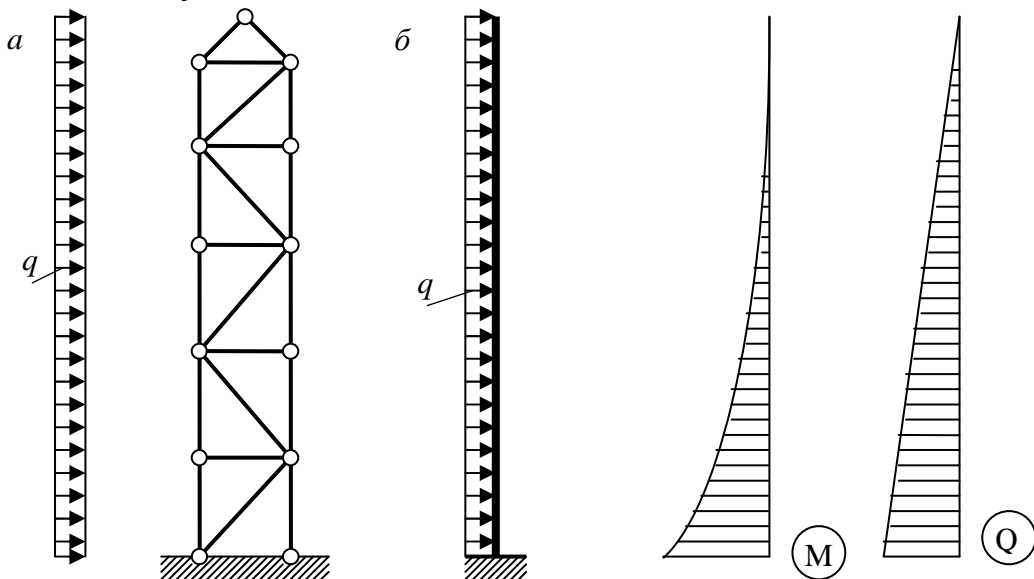


Рис. 33

Виконаний аналіз дозволяє провести аналогію між роботою ферми та роботою балки. Серед елементів ферми виділяються пояси, що сприймають балкові згинаючі моменти, і гратки, що сприймають балкову поперечну силу. Цю аналогію можна поширити й на інші ферми. Наприклад, для оцінки роботи поясів та розкосів ферми опори ЛЕП (рис. 33,а) під вітровим навантаженням можна, замінивши її стержнем (рис. 33,б), за епюрами M та Q одержати уявлення про роботу елементів ферми.

Прикладом використання балкової аналогії може бути застосування ферм із полігональним обрисом поясів (рис. 32,в). У цьому випадку збільшення висоти ферми до середини прогону дозволяє зробити розподіл зусиль в елементах поясів рівномірнішим.

4.2.3. Визначення зусиль у стержнях складних ферм. Спосіб замкнутого перерізу. Спосіб сумісних перерізів.

Для ряду ферм застосування розглянутих вище способів (вирізання вузлів у класичній формі, моментної точки, проекцій) є неможливим. У деяких випадках рішення можна одержати, якщо провести переріз складної конфігурації, наприклад, I-I (рис. 34) для обчислення зусиль у поясах напіврозкісної ферми. Цей переріз перетинає чотири стержня, але можна знайти точки перетину (моментні точки) трьох з них: т. m_1 - для визначення зусилля N_1 та т. m_2 - для зусилля N_2 .

В інших випадках зусилля можна обчислити способом замкнутого перерізу або способом сумісних перерізів.

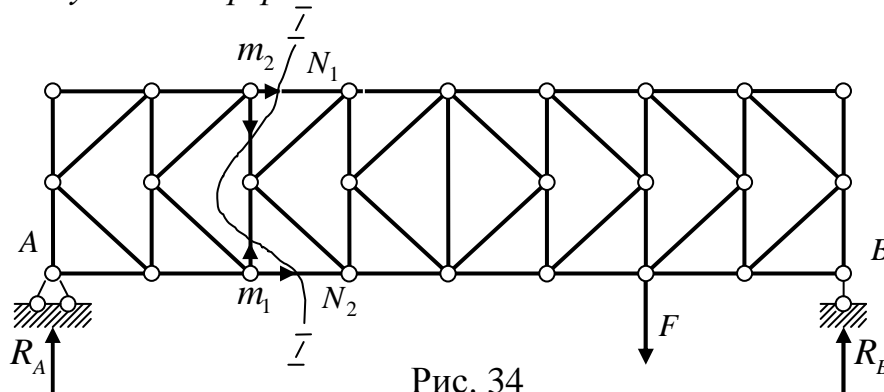


Рис. 34

Розглянемо детальніше перелічені вище способи розрахунку складних ферм.

Спосіб замкнутого перерізу застосовують у тих випадках, коли у фермі (рис. 35,а) можна виділити деякий диск (1-2-3), зв'язаний з іншою частиною ферми трьома стержнями (1-4, 2-5 та 3-6). Вирізвавши цей диск замкненим перерізом, розглянемо його рівновагу (рис. 35,б). Застосувавши спосіб моментної точки, запишемо:

$$\sum M_m = 0; F \cdot r_f - N_{2-5} \cdot r = 0,$$

звідки

$$N_{2-5} = F \cdot r_f / r.$$

Подальший розрахунок можна виконати, наприклад, способом вирізання вузлів: у вузлі 2 залишається два невідомі зусилля - N_{1-2} , N_{2-3} і далі - вузли 1, 3, 4, 5.

Замкнений переріз може розрізати й більше трьох стержнів, якщо інші стержні перетинаються два рази (в загальному випадку парну кількість разів). Так, у фермі, наведеній на рис. 36,а, замкнений переріз, що вирізає диск 1-4-5, крім стержнів 1-2, 3-4 та 5-6, перетинає також стержні 3-6 та 2-6. Але у відокремленій частині (рис. 36,б) зусилля N_{3-6} та N_{2-6} в стержнях, що перерізані двічі, утворюють пари розташованих на одній прямій рівних, протилежно спрямованих сил. Рівнодіюча цих пар сил дорівнює нулю, отже, вони не входять у рівняння рівноваги, а зусилля у інших стержнях (1-2, 3-4, 5-6) можна знайти способом моментної точки.

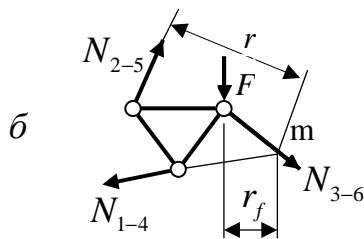
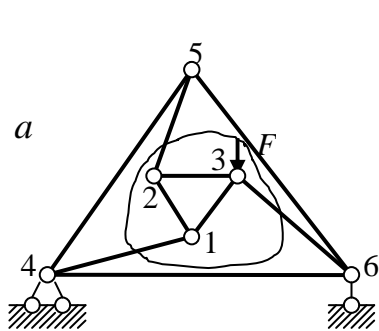


Рис. 35

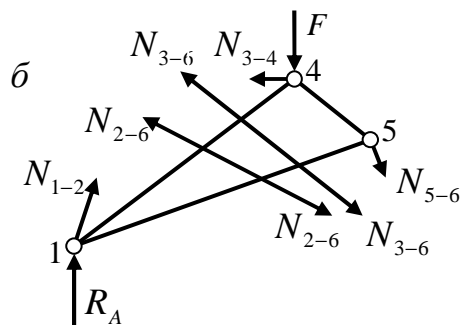
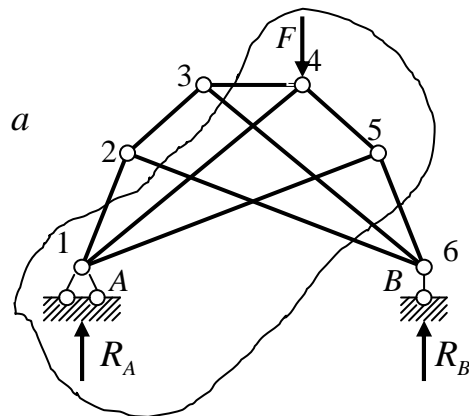


Рис. 36

Спосіб сумісних перерізів розглянемо на прикладі ферми, показаної на рис. 37. Жодний переріз у цій фермі не перетинає менше ніж чотири стержні. Звернемо увагу на перерізи I-I та II-II. Кожен із них розрізає 4 стержні, але два з них (2-7 та 3-6) повторюються. Застосовуючи спосіб моментної точки для частини, що відокремлена перерізом I-I, запишемо рівняння рівноваги так, щоб у нього увійшли лише зусилля N_{2-7} та N_{3-6} :

$$\sum M_{m_1} = 0; -F \cdot r_f + N_{2-7} \cdot r_1 - N_{3-6} \cdot r_2 = 0. \quad (20)$$

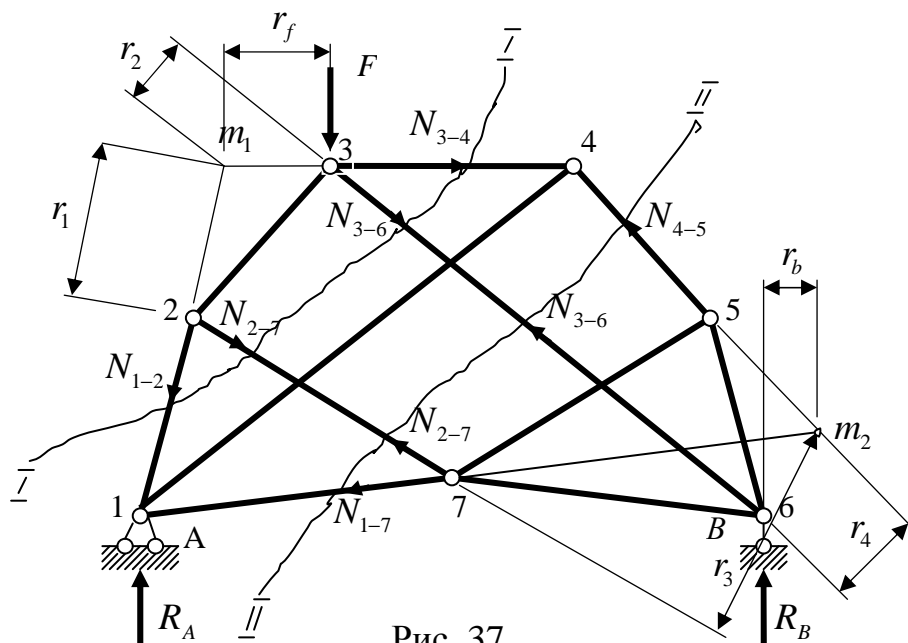


Рис. 37

Аналогічно для частини, відокремленої перерізом II-II:

$$\sum M_{m_2} = 0; -R_B \cdot r_b - N_{2-7} \cdot r_3 - N_{3-6} \cdot r_4 = 0. \quad (21)$$

Розв'язання системи рівнянь (20) та (21) дозволяє знайти величини зусиль N_{2-7} та N_{3-6} . Подальший розрахунок ферми можна виконати, наприклад, способом вирізання вузлів.

4.3. Шпренгельні ферми

Зусилля в поясах ферми, як виходить із формул (16), (17), обернено пропорційні висоті ферми. Тому при великих прогонах ферм бажано збільшувати їх висоту. Через конструктивні вимоги (розміри вузлових фасонки) кут нахилу розкосів до поясів, як правило, не повинен перебільшувати 60° . Тому збільшення висоти ферм викликає подовження панелі, а це, у свою чергу, призводить до збільшення розмірів і маси тих елементів споруди, що забезпечують вузлову передачу навантаження (плит – у кроквяних фермах, балок проїзної частини – у мостових).

Щоб уникнути подовження панелі, у вантажному поясі основної ферми вводять проміжні вузли за допомогою допоміжних ферм – шпренгелів, що опираються на вузли основної ферми (рис. 38,а). Стержні шпренгелів зазвичай суміщають зі стержнями основної ферми, одержуючи таким чином шпренгельну ферму (рис. 38,б).

Особливість шпренгелів полягає в балковому характері їх роботи, тобто при вертикальному навантаженні вони передають у вузли основної ферми тільки вертикальний тиск.

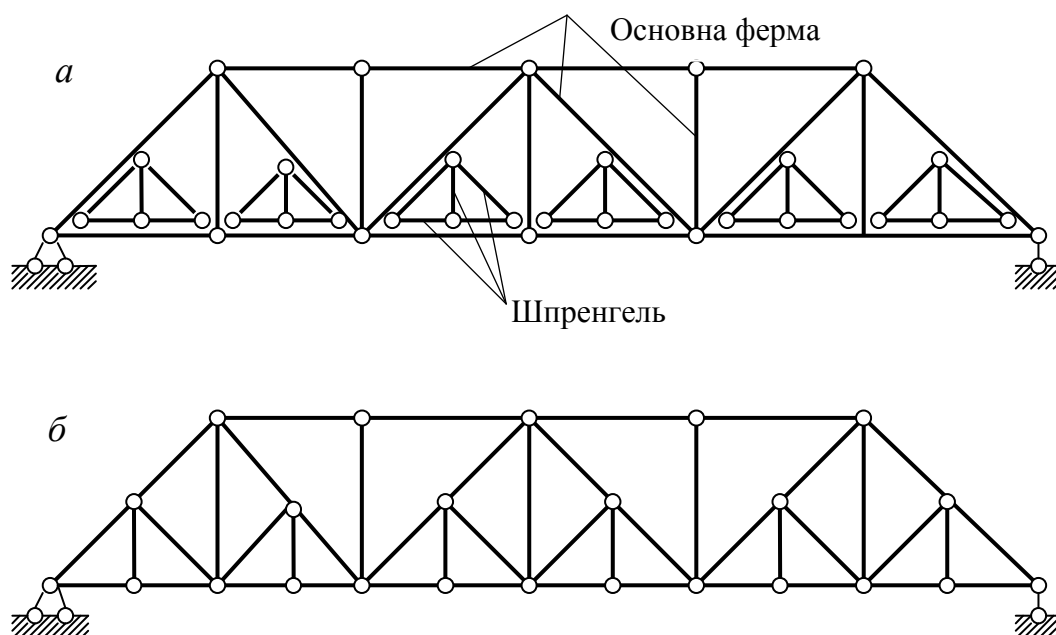


Рис. 38

Конструкція шпренгелів може бути різною. На рис. 39,а,б наведені розрахункові схеми таких шпренгелів. При цьому шпренгелі на рис. 39,а передають навантаження у вузли вантажного поясу й називаються *одноярусними*, на відміну від *двох`ярусних шпренгелів* (рис. 39,б), що передають навантаження у вузли протилежного поясу.

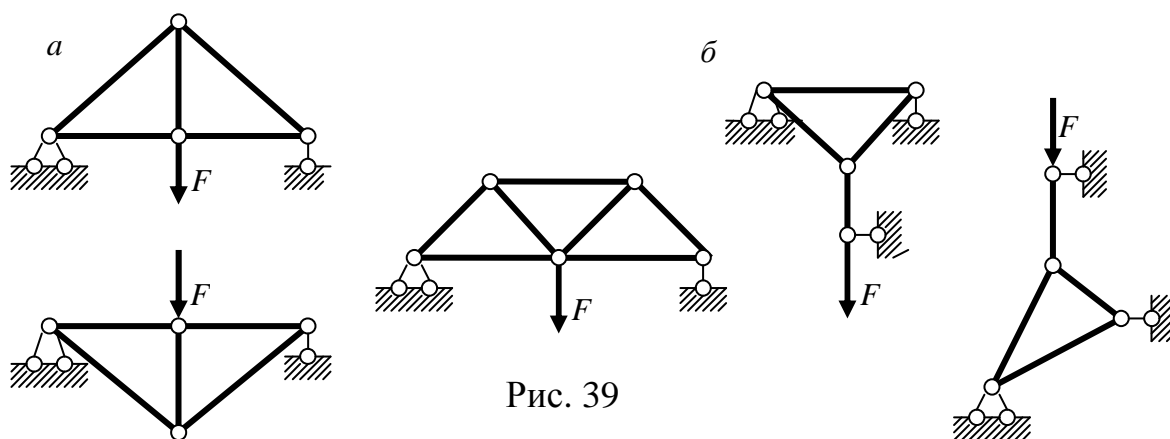


Рис. 39

Розрізняють три типи стержнів шпренгельних ферм.

1. Стержні, що входять до складу лише основної ферми. Зусилля в них обчислюють розрахунком основної ферми (шпренгелі відкидають, а прикладене до них навантаження розподіляють у вузли основної ферми).
2. Стержні, що входять до складу лише шпренгелів. Зусилля в них знаходять розрахунком відповідного шпренгеля як двохопорної ферми на місцеве навантаження.
3. Стержні, що входять до складу й основної ферми, і шпренгеля. Зусилля в них одержують як алгебраїчну суму зусиль, знайдених окремо розрахунком основної ферми й, окремо розрахунком відповідного шпренгеля.

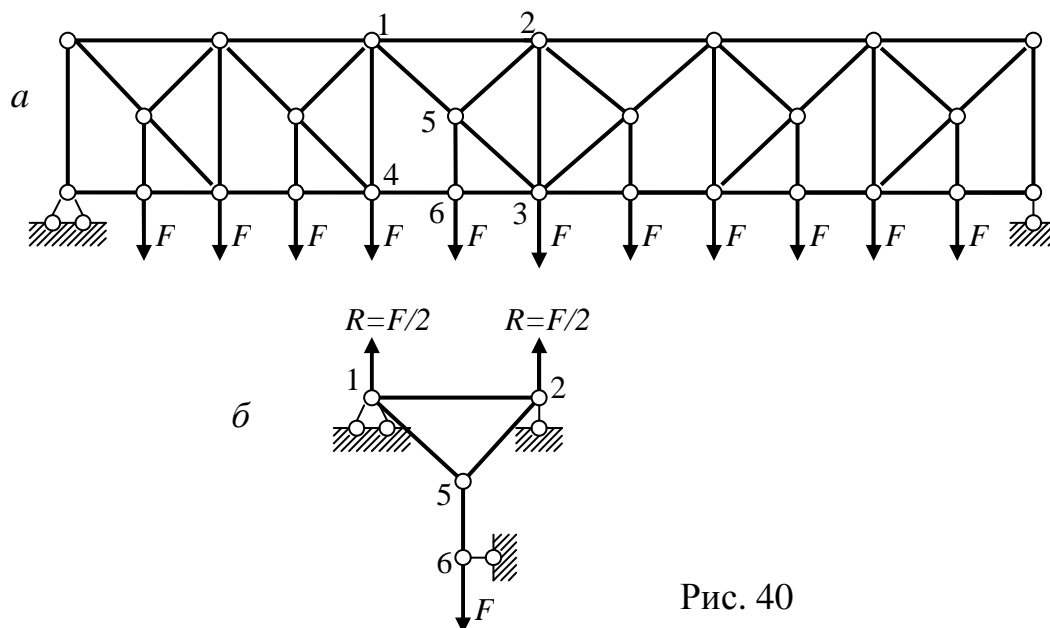


Рис. 40

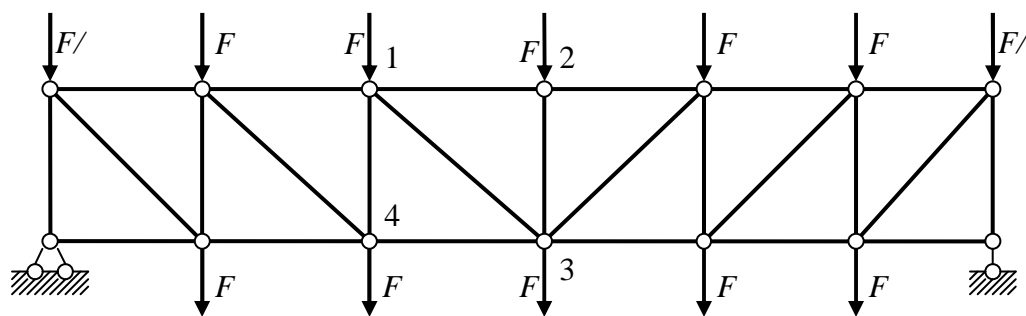


Рис. 41

Наприклад, для ферми з двох'ярусними шпренгелями, наведеної на рис. 40,а, для визначення зусиль у панелі 1 – 2 – 3 – 4 розглянемо окремо шпренгель цієї панелі (рис. 40,б) і окремо основну ферму (рис. 41). Оскільки шпренгель двох'ярусний, сила F , що прикладена в нижніх вузлах шпренгеля, передається на верхні вузли основної ферми (див. реакції опор шпренгеля на рис. 40,б).

Отже, зусилля в стержнях першого типу - $N_{2-3}, N_{4-6} = N_{3-6} = N_{3-4}^{осн}$, $N_{3-5} = N_{1-3}^{осн}$ визначають за розрахунком основної ферми (рис. 41), зусилля в стержнях другого типу - N_{2-5}, N_{5-6} - за розрахунком шпренгеля (рис. 40,б), зусилля в стержнях третього типу - N_{1-2}, N_{1-5} - підсумовуючи відповідні зусилля, одержані за розрахунком шпренгеля та основної ферми:

$$N_{1-2} = N_{1-2}^{осн} + N_{1-2}^{шпр}; \quad N_{1-5} = N_{1-3}^{осн} + N_{1-5}^{шпр}.$$

Слід зазначити, що при обчисленні зусиль поділ шпренгельної ферми на основну ферму й шпренгелі в деяких випадках непотрібний, наприклад, для визначення зусилля N_{5-6} достатньо розглянути рівновагу вузла 6 вихідної ферми (рис. 40,а).

Запитання для самоконтролю

1. Що називається фермою?
2. Які особливості навантаження ферм?
3. Які зусилля виникають в стержнях ферм і чому?
4. Чому ферми більш економічні порівняно з балками?
5. Які елементи розрізняють у фермах?
6. За якими ознаками класифікують ферми?
7. Як застосовується спосіб вирізання вузлів для ручного розрахунку? У чому переваги й вади цього способу?
8. Назвіть особливі випадки рівноваги вузлів. Доведіть їх.
9. Як можна застосувати спосіб вирізання вузлів для розрахунку ферми з будь-яким розташуванням стержнів?
10. В якому випадку раціонально визначати зусилля способом моментної точки? Як знайти моментну точку?
11. Як залежать зусилля в поясах балкової ферми від її висоти?
12. Як змінюються зусилля в поясах балкової ферми вздовж її прогону?
13. У чому різниця між роботою нижнього та верхнього поясів балкової ферми?
14. В якому випадку раціонально застосовувати спосіб проекцій?
15. Яка різниця в характері роботи висхідних та низхідних розкосів балкової ферми?
16. Як змінюються зусилля в розкосах балкової ферми вздовж її прогону?
17. В яких випадках застосовується спосіб замкненого перерізу?
18. Як застосовується спосіб сумісних перерізів?
19. Що таке шпренгельна ферма?
20. З якою метою застосовують шпренгелі?
21. Чим відрізняється робота двох'ярусних шпренгелів від одноярусних?
22. На які типи поділяються стержні шпренгельних ферм?
23. Як визначають зусилля в стержнях шпренгельної ферми залежно від типу стержня?

5. РОЗПІРНІ СИСТЕМИ

5.1. Основні визначення

Стержень із криволінійною віссю (точніше, брус малої кривини), показаний на рис. 42,а, є балковою системою. Справді, при дії вертикального навантаження в такій системі виникають тільки вертикальні опорні реакції. На відміну від балки, в такому брусі з'являються значні горизонтальні переміщення опорної точки B . Якщо закріпити обидва опорні перерізи бруса нерухомо, в опорах, крім вертикальних, з'являться і горизонтальні опорні реакції (рис. 42,б). Ці реакції називають *розпором*, а таку систему – *аркою*. Походження терміна "розпір" пов'язано з тим, що він відповідає тим силам, які діють на опорні пристрої, прагнучи розсунути ("розперти") їх в горизонтальному напрямку.

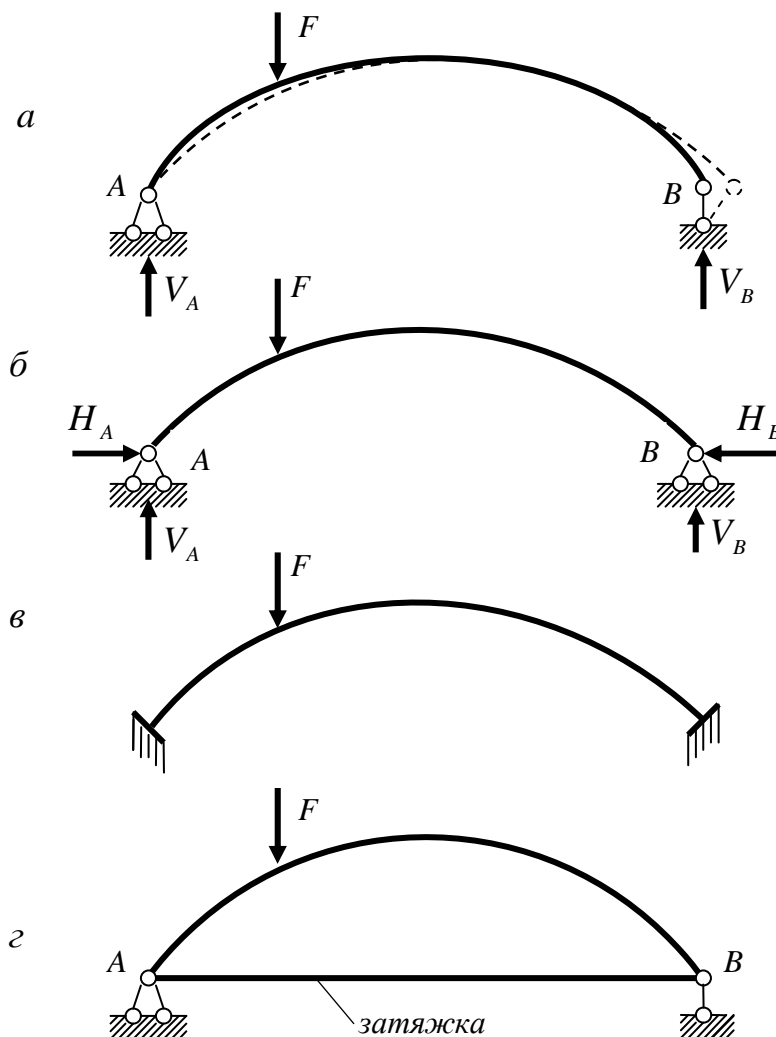


Рис. 42

Перерізи, що відповідають нерухомим опорам арки, називають *п'ятами*, а перерізи, найбільш віддалені від п'ят (переріз C на рис. 43), – *ключем* або *замком*. Відстань між центрами опорних перерізів арки називають *прогоном*. Найкоротшу відстань від лінії, що з'єднує п'яти, до замка називають *стрілою підйому арки* й

позначають f . Відношення стріли підйому до прогону називають *пологістю арки*. При $f/l < 1/4$ арки звичайно вважають пологими, при $f/l > 1/4$ - крутими.

Арка, показана на рис. 43, називається *тришарнірною*. Вона є статично визначуваною. Арку, показану на рис. 42,б, називають *двошарнірною*, якщо опори арки є затисненнями, арка називається *безшарнірною* (рис. 42,в). Наведені арки є статично невизначуваними.

Системи, у яких при дії вертикального навантаження, крім вертикальних, з'являються й горизонтальні складові опорних реакцій, називають *розпірними*. Крім арок, до них відносять тришарнірні рами, аркові ферми, комбіновані й висячі системи.

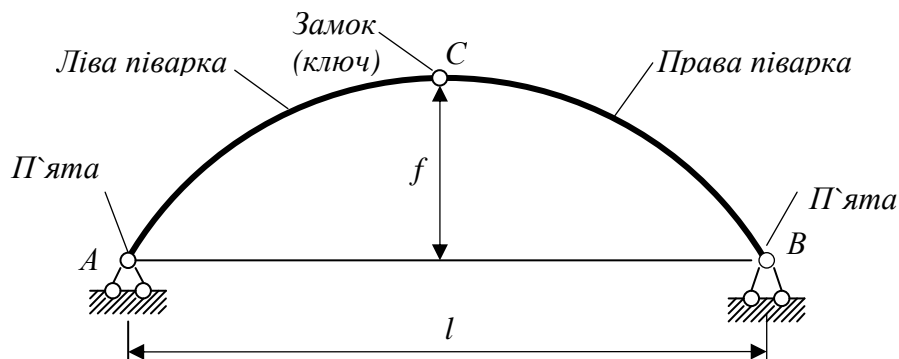


Рис. 43

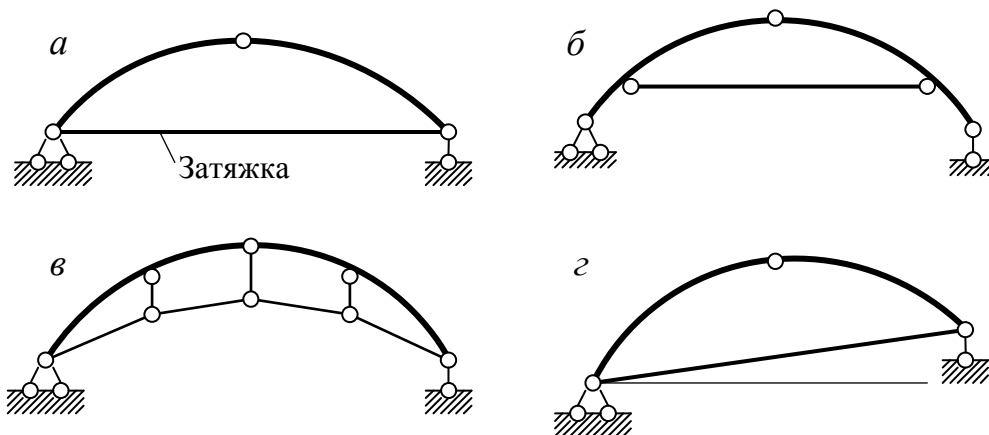


Рис. 44

Взаємна нерухомість опор двошарнірної й тришарнірної арки може бути забезпечена також встановленням додаткового стержня, який з'єднує піварки. Цей стержень називають *затяжкою* (рис. 42,г, 44,а). При цьому затяжка може розташовуватися вище рівня п'ят (*підвищена затяжка*), а також бути виконана *ламаною*. Ці варіанти розташування затяжки для тришарнірної арки наведені на рис. 44,б,в.

На відміну від звичайної арки, одна з опор тришарнірної арки із затяжкою повинна бути шарнірно-рухомою, інакше система не буде статично визначуваною. За цих обставин при вертикальному навантаженні горизонтальні реакції відсутні, а розпір сприймається затяжкою всередині споруди. Арки із затяжками застосовують переважно в тих випадках, коли влаштування опор, що забезпечують сприйняття

розпору, стає складним (у берегових опорах мостів при слабких ґрунтах, у покриттях будівель).

Арку, п'яти якої розташовані на різних рівнях, називають *повзучою* (рис. 44,з).

Вісь арки найчастіше приймають окресленою за параболою або дугою кола. Арки в цьому випадку називають відповідно *параболічними* та *коловими* (*циркульними*).

5.2. Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження

Розглянемо тришарнірну арку з довільним обрисом осі, до якої прикладене довільне вертикальне навантаження – сили F_1 , F_2 (рис. 45,а). У опорах арки виникають вертикальні реакції V_A та V_B , а також горизонтальні – H_A та H_B .

Запишемо рівняння рівноваги арки:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= H_A - H_B = 0; \\ \sum M_A &= -F_1 a_1 - F_2 a_2 + V_B l = 0; \\ \sum M_B &= F_1 (l - a_1) + F_2 (l - a_2) - V_A l = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

З першого рівняння (22) виходить, що $H_A = H_B$, тобто *при вертикальному навантаженні горизонтальні реакції опор будуть однакові*. Ці реакції називають *розпором* і позначають так:

$$H_A = H_B = H. \quad (23)$$

З другого та третього рівняння (21) знаходяться вертикальні реакції:

$$V_B = (F_1 a_1 + F_2 a_2) / l; \quad V_A = [F_1 (l - a_1) + (F_2 (l - a_2))] / l.$$

При розрахунку арки на вертикальне навантаження, як і при розрахунку ферм, використовуються балкові аналогії. Розглянемо балку на двох опорах (рис. 45,б) одного прогону з аркою, завантажену таким самим навантаженням, що й арка. Реакції й зусилля у цій балці, як і раніше для ферм, будемо називати балковими.

Неважко упевнитись, що умови рівності нулю сум моментів сил балки відносно її опорних точок A та B повністю співпадають з другим та третім рівняннями (22). Звідси можна зробити висновок, що *вертикальні реакції опор тришарнірної арки при вертикальному навантаженні є балковими*.

Для визначення розпору використаємо умову рівності нулю згинаючого моменту в проміжному шарнірі C арки. Цей момент запишемо, наприклад, через сили, розташовані ліворуч від перерізу C :

$$M_C = \sum_{\text{лів}} M_C = 0.$$

або

$$-V_A \frac{l}{2} + F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) + H f = 0. \quad (24)$$

Звернемо увагу на те, що перші два доданки у (24) являють собою взятий зі зворотним знаком балковий згинаючий момент M_C^o у перерізі C (рис. 45,б):

$$M_C^o = V_A \frac{l}{2} - F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right).$$

З урахуванням цього одержуємо:

$$H = M_C^o / f. \quad (25)$$

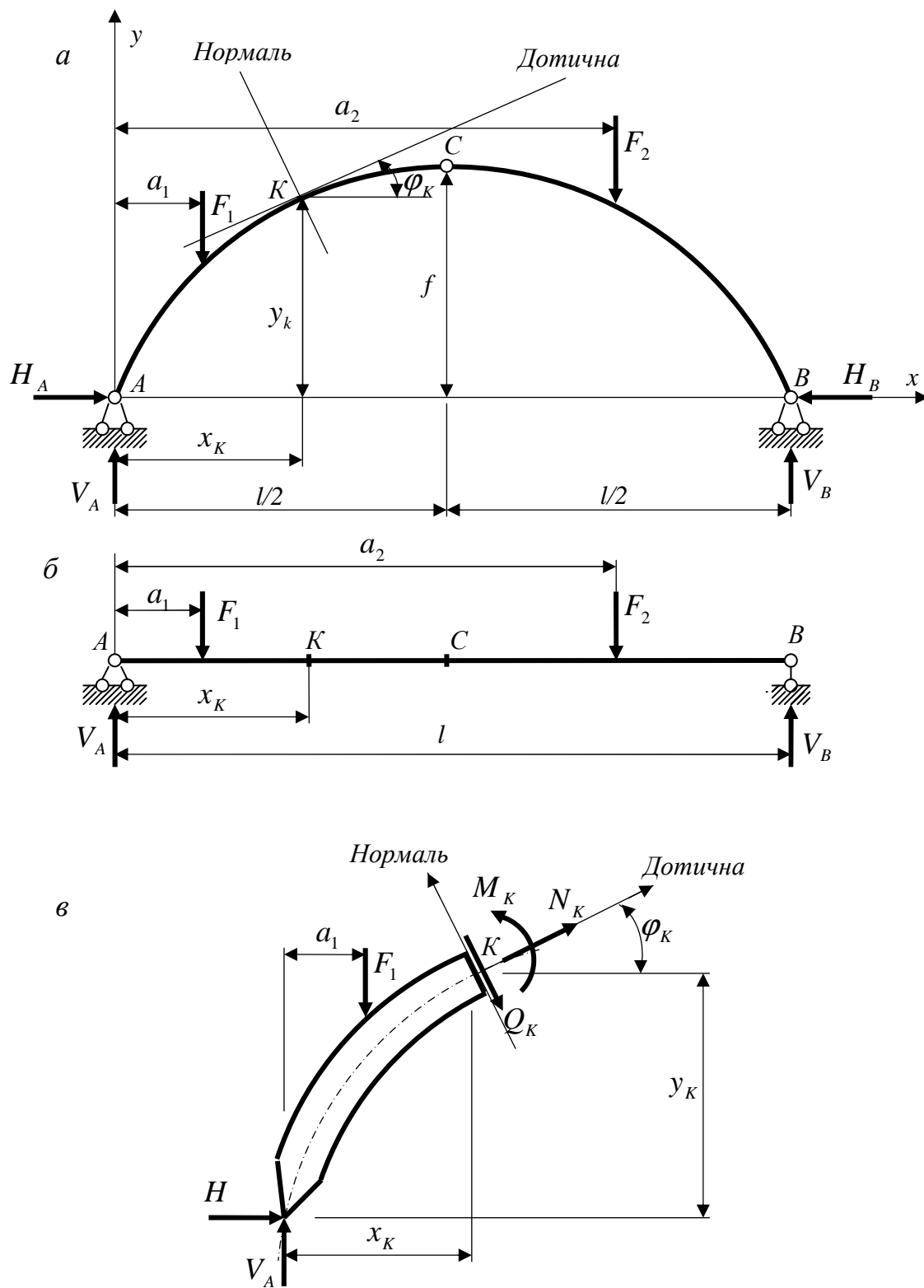


Рис. 45

Оскільки величина балкового згинаючого моменту залежить лише від прогону арки та заданого навантаження, можна зробити висновок, що *величина розпору обернено пропорційна стрілі підйому арки*.

Обчислимо внутрішні зусилля у перерізі K арки (рис. 45,а) з координатами центру ваги x_K та y_K . Для цього розглянемо рівновагу лівої від перерізу частини арки (рис. 45,б) під дією зовнішніх та внутрішніх сил. Умови рівності нулю суми

моментів цих сил відносно центру ваги перерізу та сум проекцій сил на нормаль і дотичну до осі арки мають такий вид:

$$\sum M_R = -V_A x_K + F_1(x_K - a_1) + H y_K + M_K = 0; \quad (26)$$

$$\sum F_{\text{норм}} = (V_A - F_1) \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K - Q_K = 0; \quad (27)$$

$$\sum F_{\text{дот}} = (V_A - F_1) \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K + N_K = 0. \quad (28)$$

Перші два доданки у (26) – моменти вертикальних сил - являють собою взятий зі зворотним знаком балковий згинаючий момент (рис. 45,б) в перерізі K :

$$M_K^0 = V_A x_K - F_1(x_K - a_1).$$

З урахуванням цього з (26) одержимо вираз для згинаючого моменту в перерізі арки при вертикальному навантаженні:

$$M_K = M_K^0 - H y_K. \quad (29)$$

У рівняннях (27), (28) вираз у дужках являє собою балкову поперечну силу ($Q_K^0 = V_A - F_1$) у перерізі K (рис. 45,б). З урахуванням цього одержуємо такі залежності:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \quad (30)$$

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \quad (31)$$

Аналізуючи (29), (30), (31), можна зробити наступні висновки.

Розпір створює в перерізі арки момент, протилежний за знаком моменту вертикальних сил. За рахунок цього згинаючі моменти в арці зменшуються порівняно зі згинаючими моментами в еквівалентній балці.

У перерізах арки з'являються значні поздовжні сили, тобто, по суті, порівняно з балкою, деформація згину в арці частково замінюється деформацією стиску. Ця обставина робить арку більш економічною порівняно з балкою за рахунок повнішого використання матеріалу при розтягу-стиску.

Вирази для внутрішніх зусиль містять нелінійні величини y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, отже незалежно від наявності розподіленого навантаження зусилля змінюються вздовж осі арки нелінійно. Цю обставину необхідно враховувати при побудові епюр.

Як виходить із виразу (31), поздовжні сили в арці при дії вертикального навантаження завжди стискаючі. У зв'язку із цим в арці, на відміну від інших систем, іноді стискаючі поздовжні сили вважають додатними.

При обчисленні зусиль положення перерізу на осі арки зазвичай задають координатою x . Для визначення ординат y центрів ваги перерізів та тригонометричних функцій кута φ нахилу дотичної до осі у арках різного обрису осі користаються такими залежностями:

- вісь окреслена за квадратною параболою:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x);$$

- вісь окреслена за дугою кола:

$$y = f - r(1 - \cos \varphi); \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{r} \left(\frac{l}{2} - x \right), \text{ де } r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

- вісь окреслена за синусоїдою:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l};$$

- вісь окреслена за дугою еліпса:

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(l-2x)}{l \sqrt{x(l-x)}}.$$

5.3. Розрахунок арки з затяжкою

Розглянемо арку з затяжкою (рис. 46), завантажену довільним вертикальним навантаженням. Відповідно до опорних кріплень ця арка зовні є балковою системою. Горизонтальна реакція при вертикальному навантаженні відсутня, а вертикальні реакції - є балковими, тобто відповідають реакціям еквівалентної двохопорної балки. Для визначення зусилля в затяжці проведемо переріз $I-I$ через шарнір C . З умови рівності нулю згинаючого моменту в шарнірі одержимо:

$$N_3 = M_C^0 / f. \quad (32)$$

З одержаного виразу випливає, що зусилля в затяжці відповідає розпору арки без затяжки, тому його часто називають *внутрішнім розпором*.

Внутрішні зусилля у перерізах арки визначають за формулами, аналогічними (29)...(31), замінивши в них H на N_3 :

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^0 - N_3 y_k; \\ Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi_k - N_3 \sin \varphi_k; \\ N_k &= -Q_k^0 \sin \varphi_k - N_3 \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (33)$$

При розрахунку арки з підвищеною затяжкою (рис. 47) слід мати на увазі, що частина арки, розташована нижче затяжки, працює як балочна система. Зусилля в такій затяжці визначається за формулою:

$$N_3 = M_C^0 / f', \quad (34)$$

де f' - відстань від затяжки до замка C .

Внутрішні зусилля в перерізах, розташованих нижче затяжки, не залежать від наявності затяжки:

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= M_{K_1}^0, \\ Q_{K_1} &= Q_{K_1}^0 \cdot \cos \varphi_{K_1}, \\ N_{K_1} &= -Q_{K_1}^0 \cdot \sin \varphi_{K_1}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Для перерізів, розташованих вище затяжки, необхідно враховувати наявність горизонтальних сил N_3 , прикладених до арки в точках D та E :

$$\left. \begin{aligned} M_{K_2} &= M_{K_2}^0 - N_3 \cdot y_{K_2}; \\ Q_{K_2} &= Q_{K_2}^0 \cdot \cos \varphi_{K_2} - N_3 \cdot \sin \varphi_{K_2}; \\ N_{K_2} &= -Q_{K_2}^0 \cdot \sin \varphi_{K_2} - N_3 \cdot \cos \varphi_{K_2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

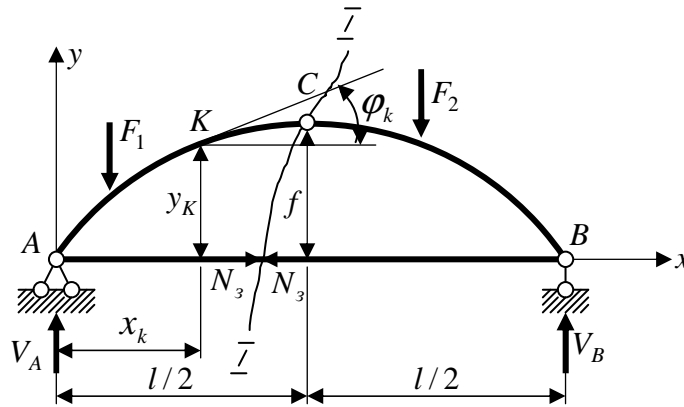


Рис. 46

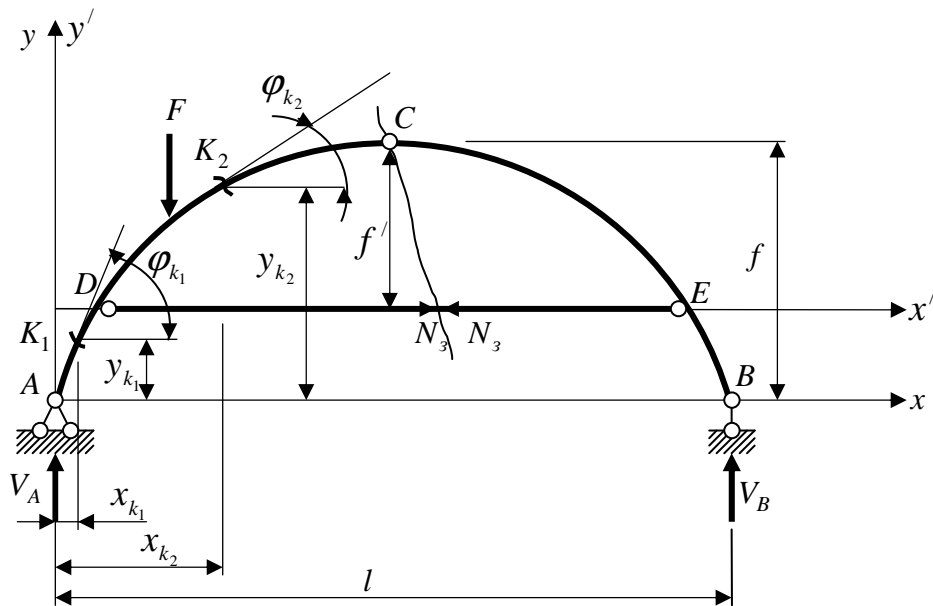


Рис. 47

5.4. Раціональна вісь тришарнірної арки

Раціональною віссю арки називають таку вісь, при якій згинаючі моменти в усіх її перерізах дорівнюють нулю: $M = M^0 - H y = 0$.

Звідси одержуємо:
$$y_{\text{рац}} = \frac{M^0}{H}. \quad (37)$$

Як випливає з (25), величина розпору при заданих навантаженні та стрілі підйому є константою. Отже, раціональна вісь арки окреслена за балковою епюрою згинаючих моментів.

Для прикладу наведемо арку при дії рівномірно розподіленого вздовж прогону навантаження інтенсивності q (рис. 48,а).

Балкові реакції та згинаючі моменти неважко визначити за рис. 48,б:

$$V_A = V_B = ql / 2;$$

$$M^0 = V_A x - qx^2 / 2 = \frac{q}{2} x(l - x);$$

$$M_C^0 = ql^2 / 8.$$

Розпір арки визначаємо за (25): $H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$

Підставляючи вирази балкових моментів та розпору в (37), одержимо:

$$y_{\text{рац}} = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Отже, раціональна вісь арки при рівномірно розподіленому вздовж прогону навантаженні окреслена за квадратною параболою.

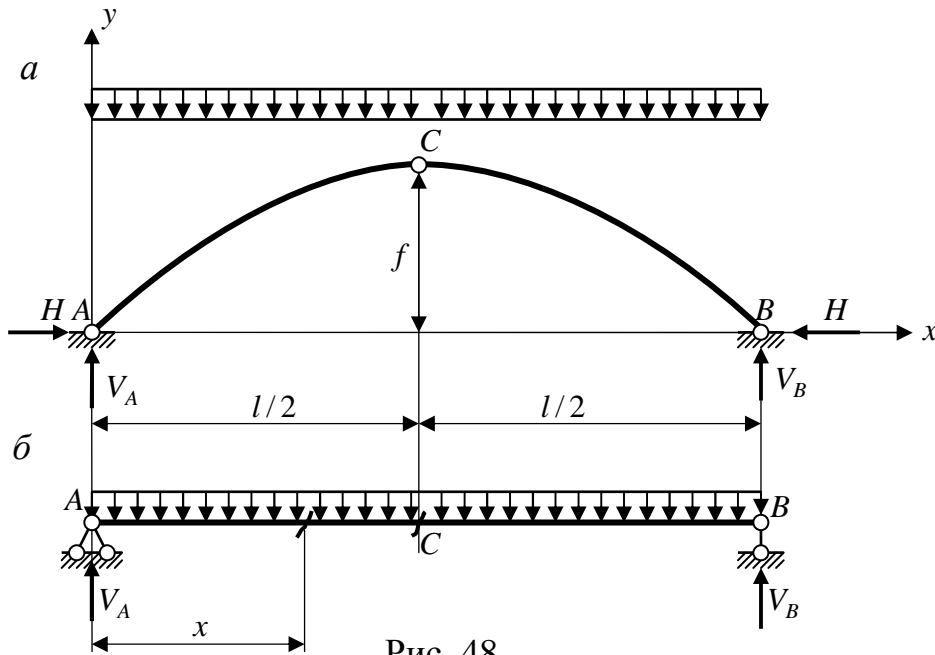


Рис. 48

Зазначимо, що перерізи арки з раціональною віссю зазнають лише стиску і, особливо при малих стрілах підйому, слід враховувати можливість втрати стійкості арки.

5.5. Особливості розрахунку розпірних систем

5.5.1 Тришарнірна арка при довільно спрямованому навантаженні.

При дії на арку такого навантаження (рис. 49) останнє розкладають на вертикальні F_{1y}, F_{2y} й горизонтальні F_{1x}, F_{2x} складові.

Для визначення вертикальних реакцій V_A, V_B розглядають рівновагу арки як твердого тіла:

$$\sum M_A = -F_{1x} y_1 - F_{1y} x_1 - F_{2x} y_2 - F_{2y} x_2 + V_B l = 0;$$

$$\sum M_B = -F_{1x} y_1 + F_{1y} (l - x_1) - F_{2x} y_2 + F_{2y} (l - x_2) - V_A l = 0,$$

звідки:

$$V_B = (F_{1x} y_1 + F_{1y} x_1 + F_{2x} y_2 + F_{2y} x_2) / l,$$

$$V_A = [-F_{1x} y_1 + F_{1y} (l - x_1) - F_{2x} y_2 + F_{2y} (l - x_2)] / l.$$

Отже, при довільно спрямованому навантаженні вертикальні реакції опор арки не є балковими.

Для визначення горизонтальних складових H_A та H_B реакцій опор записують умови рівності нулю згинаючого моменту в замковому шарнірі C . Розглядаючи ліві від шарніру сили, одержимо:

$$M_C = \sum M_{C, \text{лів}} = V_A \frac{l}{2} - F_{1x}(f - y_1) - F_{1y} \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - H_A f = 0,$$

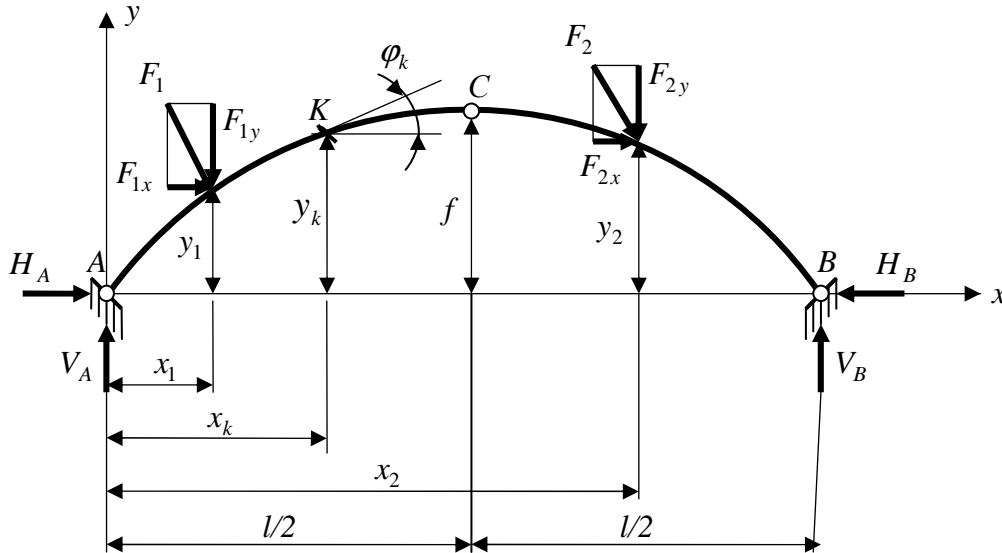


Рис. 49

звідки $H_A = \left[V_A \frac{l}{2} - F_{1x}(f - y_1) - F_{1y} \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) \right] / f$.

Так само через праві сили маємо:

$$M_C = \sum M_{C, \text{прав}} = V_B \frac{l}{2} + F_{2x}(f - y_2) - F_{2y} \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) - H_B f = 0,$$

звідки $H_B = \left[V_B \frac{l}{2} + F_{2x}(f - y_2) - F_{2y} \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) \right] / f$.

Умова рівності нулю суми проекцій сил арки на вісь x дає:

$$H_A + F_{1x} + F_{2x} - H_B = 0,$$

звідки випливає, що при довільно спрямованому навантаженні горизонтальні реакції опор у загальному випадку не будуть однаковими.

При обчисленні внутрішніх зусиль у перерізах арки необхідно користуватися загальними правилами (див. п. 3.1). Наприклад, для перерізу K (рис. 49) маємо:

$$M_K = V_A \cdot x_K - F_{1y}(x_K - a_1) - H_A \cdot y_K - F_{1x}(y_K - y_1),$$

$$Q_K = (V_A - F_{1y}) \cos \varphi_K - (H_A + F_{1x}) \sin \varphi_K,$$

$$N_K = (F_{1y} - V_A) \sin \varphi_K - (H_A + F_{1x}) \cos \varphi_K.$$

5.5.2. Тришарнірні рами.

Розрахунок тришарнірної рами (рис. 50) відрізняється від розрахунку інших рам (п. 3) лише методикою визначення опорних реакцій V_A, V_B, H_A, H_B . Їх

знаходять із рівнянь рівноваги, аналогічних рівнянням рівноваги тришарнірної арки при довільно спрямованому навантаженні. Визначення внутрішніх зусиль та побудова їх епюр виконуються як для звичайних рам (див. п. 3).

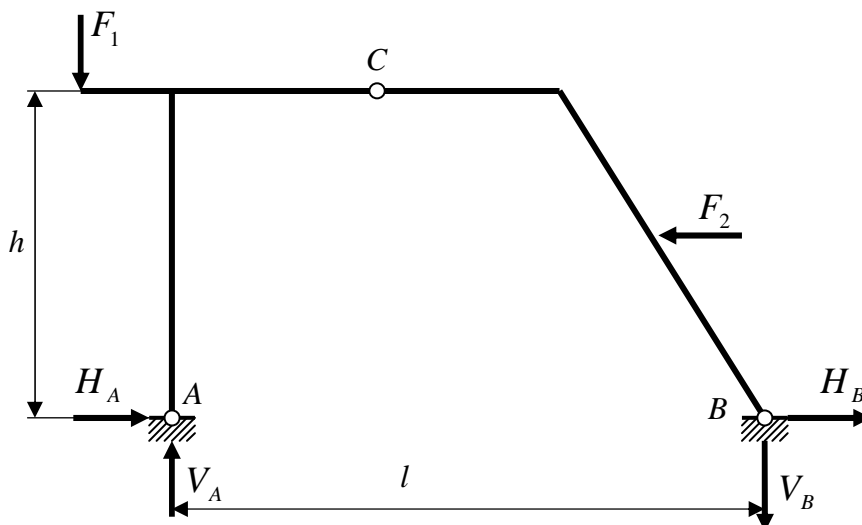


Рис. 50

5.5.3. Тришарнірні аркові ферми.

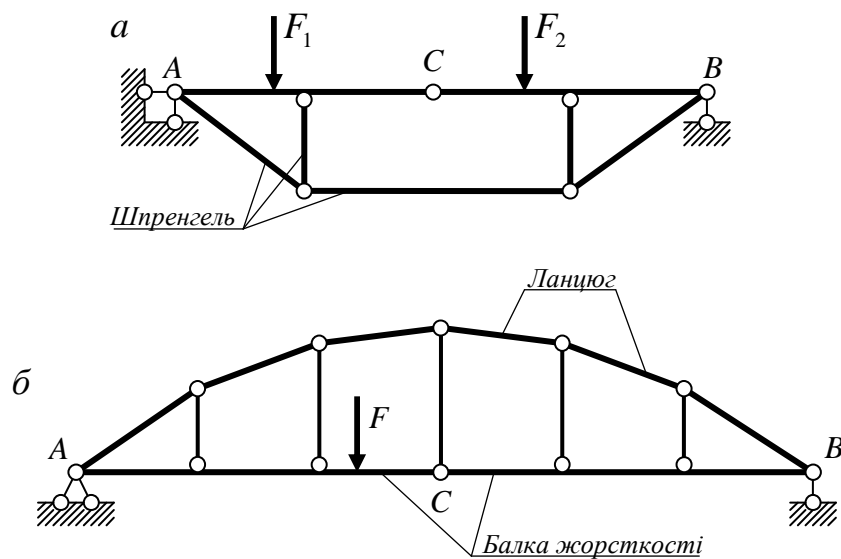
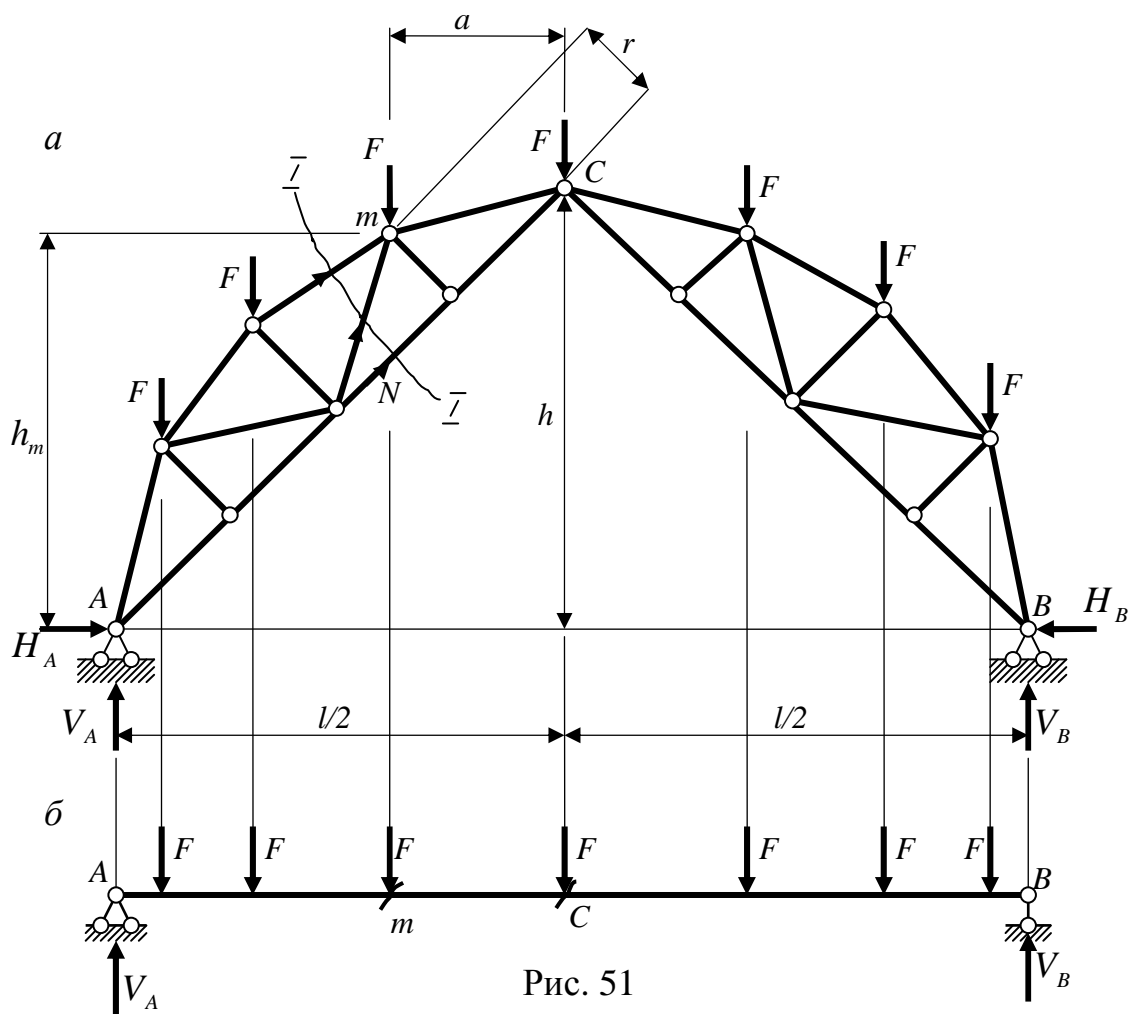
Тришарнірна аркова ферма (рис. 51,а) являє собою тришарнірну арку, напіварку якої виконані у вигляді ферм. Вертикальні реакції і розпір визначаються в арковій фермі так само, як і в тришарнірній арці або рамі. Наприклад, при вертикальному навантаженні (рис. 51,а) $\sum M_A = 0$, звідки $V_B = 3,5 F$; $\sum M_B = 0$, звідки $V_A = 3,5 F$; $\sum x = 0$, звідки $H_A = H_B = H$; $\sum M_{C,l} = 0$, звідки $H = M_C^o / h$ (M_C^o - балковий згинаючий момент у перерізі С за рис. 51,б).

Зусилля в стержнях визначають так само, як у звичайній фермі (див. п. 4), способами вирізання вузлів, моментної точки та ін. Наприклад, для обчислення зусилля N (рис. 51,а) проведемо переріз I-I і знайдемо моментну точку m . Застосувавши далі умову рівноваги $\sum M_{m,лів} = 0$ або $\sum M_{m,прав} = 0$, знайдемо зусилля N . Це зусилля можна виразити через балковий момент і розпір:

$$N = M_m^o / r - H \cdot h_m / r.$$

5.5.4. Комбіновані та висячі системи.

Комбінованими називають системи, у яких об'єднані різні за видом роботи конструкції. В основному в таких системах поєднуються згинальні й стиснені (розтягнуті) елементи. Завдяки наявності розтягнутих елементів згинальні розвантажуються, й витрата матеріалу зменшується. Прикладами комбінованих систем є арка із затяжкою (рис. 44,а,б,в), балка зі шпренгелем (рис. 52,а), ланцюг із балкою жорсткості (рис. 52,б).



Розрахунок комбінованих систем після обчислення опорних реакцій починають із визначення зусиль у стиснених (розтягнутих) елементах. Так, в арці з ламаною затяжкою (рис. 53,а) опорні реакції V_A та V_B знаходять з умов

$\sum M_A = 0$ і $\sum M_B = 0$. Далі, провівши переріз I-I через шарнір C , знаходять зусилля N_3 в середньому елементі затяжки. Для визначення зусиль в інших елементах затяжки й у підвісках вирізають вузли E (рис. 53,б) і D (рис. 53,в).

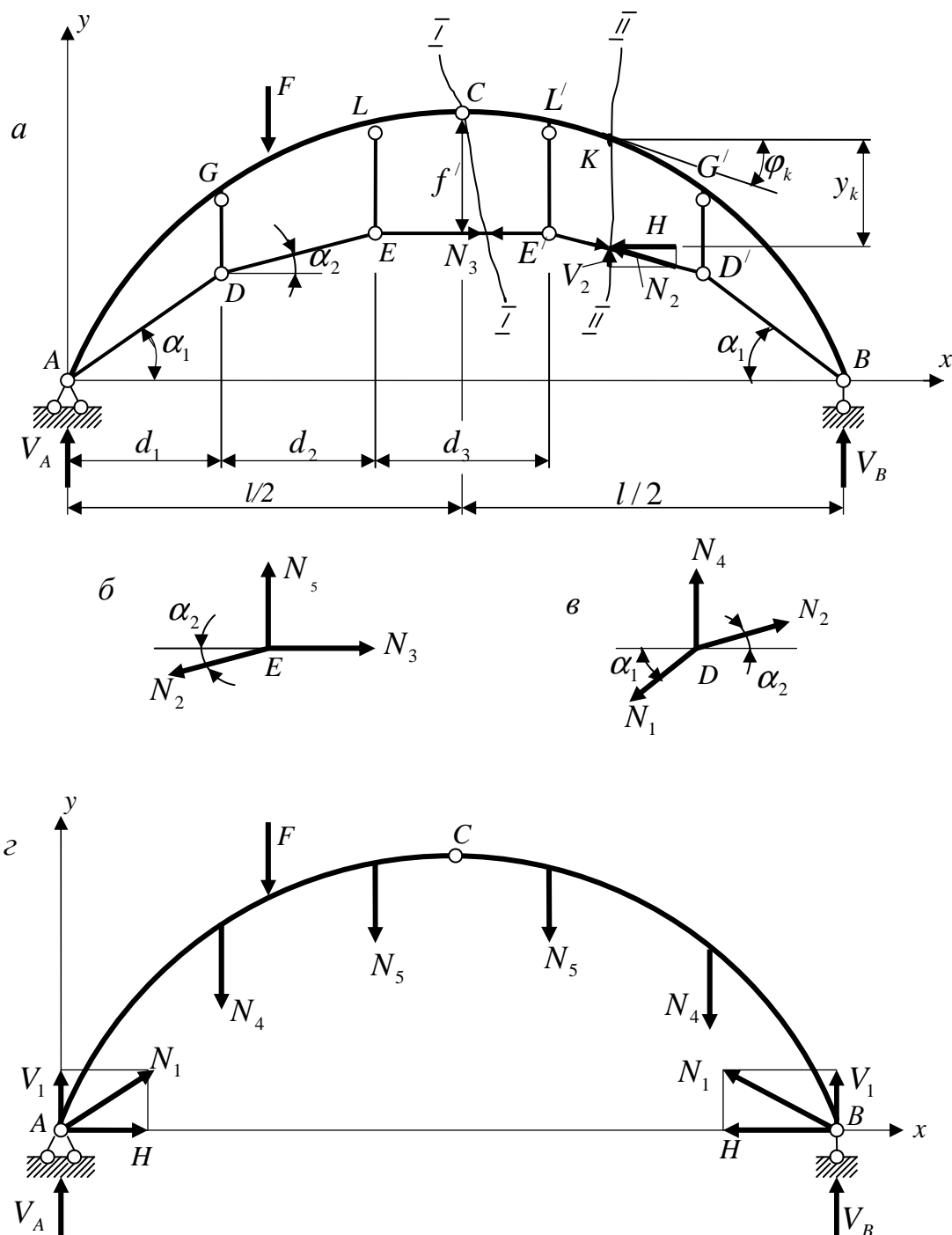


Рис. 53

При цьому суми проекцій сил у вузлах затяжки на горизонтальну вісь дають таке співвідношення:

$$N_3 = N_2 \cos \alpha_2 = N_1 \cos \alpha_1 = \dots = H, \quad (38)$$

звідки виходить, що горизонтальні проекції зусиль в усіх елементах зтяжки однакові. Ці проекції відіграють таку саму роль, що й розпір у звичайній арці, тому позначаються H . Як випливає з (38), при симетричному обрисі зтяжки зусилля в її елементах симетричні.

Після обчислення зусиль в елементах зтяжки й у підвісках, відтинаючи зтяжку, розраховують арку на дію вертикальних сил N_4 , N_5 , F і вертикальних складових V_1 зусилля N_1 . При цьому роль розпору відіграє горизонтальна складова H зусилля N_1 .

Якщо необхідно визначити внутрішні зусилля в одному лише перерізі арки, наприклад K , то зручніше скористатися іншим способом. Розсікаючи систему вертикальним перерізом II-II, що проходить через точку K (рис. 53,а), розкладаємо зусилля в зтяжці на вертикальну V_2 й горизонтальну H складові. Тоді одержимо (див. п. 5.3):

$$\begin{aligned} M_K &= M_K^o - H y_K; \\ Q_K &= (Q_K^o - V_2) \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \\ N_K &= -(Q_K^o - V_2) \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \end{aligned}$$

Після підстановки $V_2 = H \operatorname{tg} \alpha_2$ й простих перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} M_K &= M_K^o - H y_K; \\ Q_K &= Q_K^o \cos \varphi_K - H (\sin \varphi_K + \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \varphi_K); \\ N_K &= -Q_K^o \sin \varphi_K - H (\cos \varphi_K - \operatorname{tg} \alpha_2 \sin \varphi_K). \end{aligned} \quad (39)$$

Висячі системи (рис. 54) є специфічними комбінованими системами, у яких роль основної несучої конструкції відіграють ланцюг або трос, а підвішені до них балка або ферма забезпечують жорсткість споруди.

При обчисленні зусиль у висячій системі розрізають трос над опорами балки і обчислюють сумарні реакції $V_A + V_A'$ й $V_B + V_B'$, що являють собою балкові реакції. Подальший розрахунок виконують аналогічно розрахунку комбінованої системи.

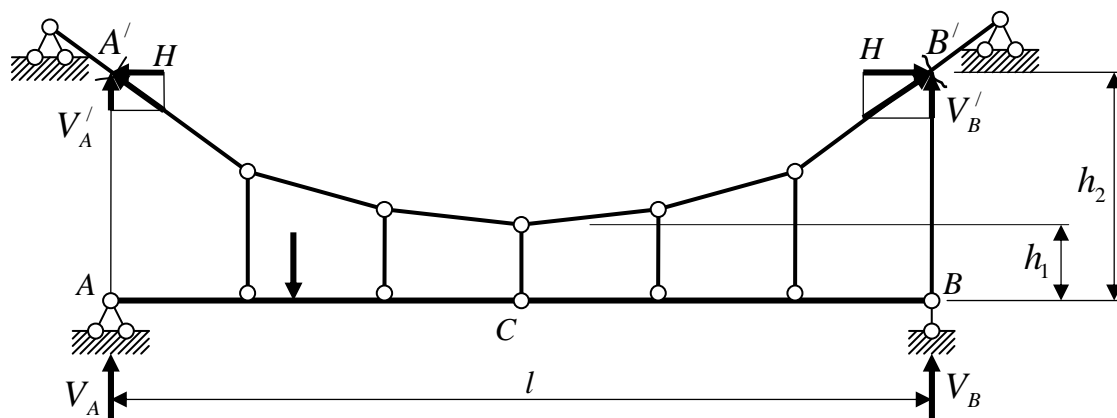


Рис. 54

Різновидомисячих систем є *вантові системи*. Зокрема, на рис. 55 наведено вантову ферму. У вантових системах похилі тяги (ванти) і підвіски зазвичай виконують у вигляді гнучких тросів. При дії постійного й тимчасового навантажень в елементах вантової системи з'являються лише розтягуючі напруження. Завдяки цьому усувається поздовжній згин стержнів і з'являється можливість застосування у вантах високоміцних матеріалів, що знижує масу конструкції.

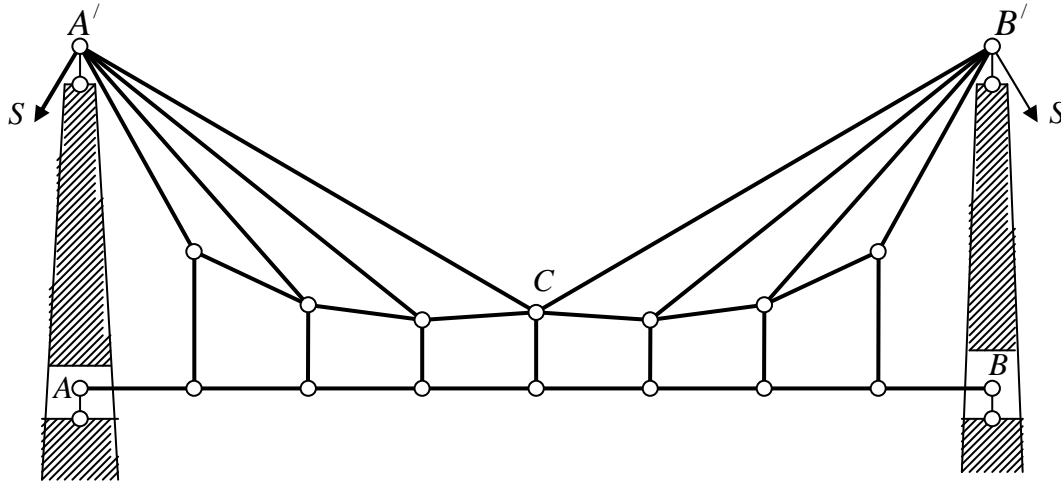


Рис. 55

Запитання для самоконтролю

1. Які системи називають розпірними?
2. Як класифікують арки за ступенем статичної невизначуваності?
3. Назвіть основні елементи тришарнірної арки.
4. Наведіть типи тришарнірних арок залежно від обрису осі, наявності затяжки, розташування п'ят.
5. Які рівняння рівноваги використовуються для визначення опорних реакцій арки?
6. Як залежить розпір при дії вертикального навантаження від стріли підйому арки?
7. Як записується вираз згинаючого моменту в перерізі арки від вертикального навантаження?
8. Наведіть вирази для визначення поперечної й поздовжньої сил у перерізі арки при вертикальному навантаженні.
9. Чим відрізняються зусилля в арці від балкових зусиль?
10. Чому арка є економічнішою системою, ніж балка?
11. Як залежать згинаючі моменти при дії вертикального навантаження від стріли підйому?
12. Чим відрізняється характер епюри внутрішніх зусиль в арці від балкових епюр?
13. У чому полягають особливості розрахунку арки із затяжкою?
14. У чому полягає особливість роботи частин арки, розташованих нижче підвищеної затяжки?
15. У чому полягають особливості обчислення опорних реакцій і внутрішніх зусиль у тришарнірних арках при дії довільно спрямованого навантаження?
16. Що таке аркова ферма?
17. Як визначають опорні реакції в арковій фермі?
18. Як визначають внутрішні зусилля в арковій фермі?
19. Що називається комбінованою системою? Наведіть приклади комбінованих систем.
20. Що виконує роль розпору в арці з ламаною затяжкою?
21. Що такеисяча система?
22. Що являє собою вантова система?

6. ПРОСТОРОВІ СТЕРЖНЕВІ СИСТЕМИ

6.1. Загальні відомості. Геометрична незмінюваність

Просторовою стержневою системою називають систему, осі стержнів якої й зовнішні навантаження не лежать в одній площині.

Серед просторових стержневих систем за характером утворення можна виокремити два види: *ферми* (рис. 56,а) та *рами* (рис. 56,б).

У деяких випадках при певній геометричній структурі системи й характері навантаження просторову систему можна розкласти на окремі плоскі системи, що працюють незалежно. Такий підхід дозволяє значно спростити розрахунок. Але навіть тоді, коли це зробити не вдається, розрахунок просторових стержневих конструкцій виконують способами й методами, відомими з розрахунку плоских стержневих систем. Щоправда, застосування цих способів і методів до просторових систем складніше, оскільки рівновага розглядається в просторі.

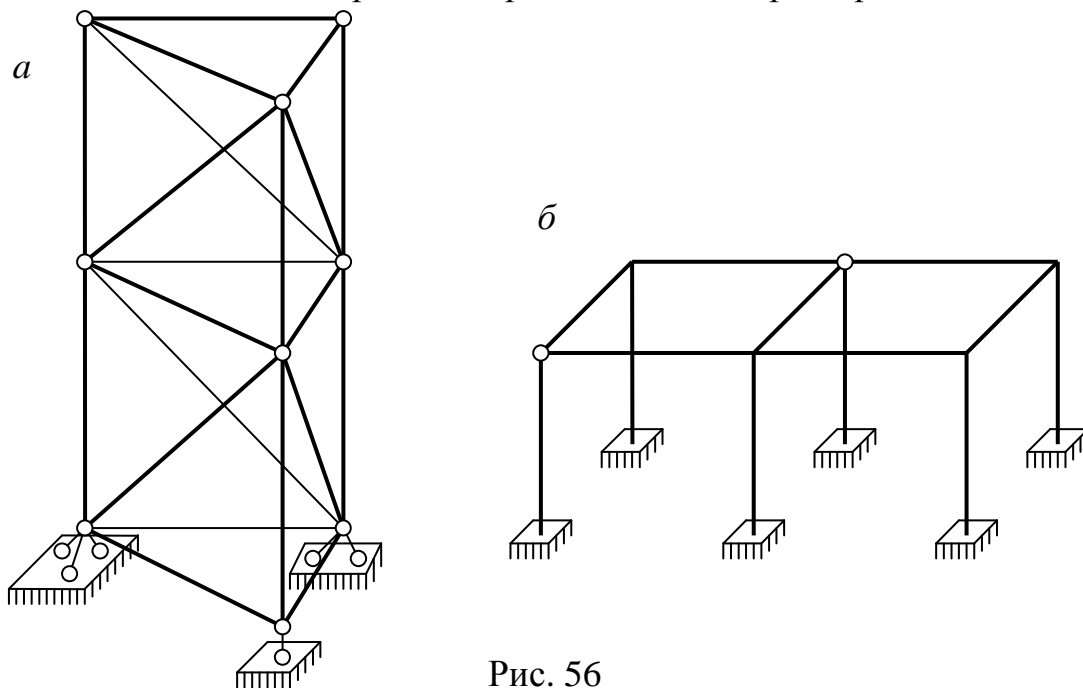


Рис. 56

Вузли просторових систем можуть бути жорсткими або шарнірними. У жорсткому вузлі при деформаціях системи не відбувається взаємне повертання стержнів. Шарніри у вузлах бувають двох типів: сферичні й циліндричні. *Сферичний шарнір* забезпечує вільний поворот відносно трьох осей (x , y , z), а *циліндричний* – вільний поворот тільки відносно однієї осі. Зокрема, у плоскій стержневій системі всі шарніри є плоскими. Дійсно, у такій системі можливий поворот тільки навколо однієї осі, перпендикулярної до площини, у якій розташовані стержні. Шарніри вважаються ідеальними, тобто такими, що допускають взаємний поворот стержнів без тертя. У просторових фермах усі стержні на кінцях з'єднані сферичними шарнірами. У рамах вузли переважно жорсткі.

Виокремлюють чотири основних види опор просторових систем, які різняться кількістю накладених в'язей. Зауважимо, що просторове тіло без в'язей має шість ступенів вільності: поступальні переміщення вздовж осей

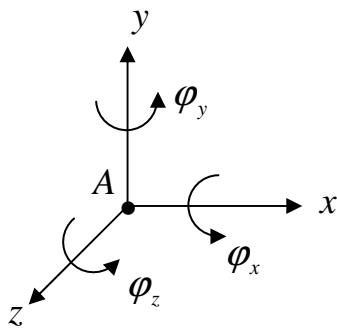


Рис. 57

x, y, z та повороти $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ навколо цих осей (рис. 57).

Плоско-рухома кульова опора зображається одним опорним стержнем із сферичними шарнірами на кінцях (рис. 58,а). Опора перешкоджає тільки зміщенню опорного перерізу A вздовж осі опорного стержня (вісь y за рис. 57), дозволяючи йому інші переміщення: $x, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Отже, плоско-рухома опора накладає

одну в'язь, залишаючи п'ять ступенів вільності.

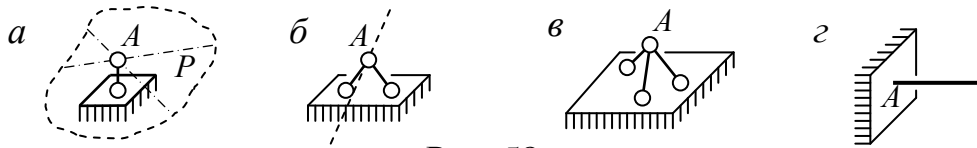


Рис. 58

Лінійно-рухома кульова опора показують у вигляді двох опорних стержнів (рис. 58,б). Ця опора перешкоджає лінійним зміщенням опорного перерізу в площині опорних стержнів ($x=0, y=0$) і допускає переміщення вздовж осі z , перпендикулярної до цієї площини, а також обертання навколо центру опорного шарніра. Вона накладає дві в'язі, залишаючи чотири ступеня вільності.

Нерухома кульова опора схематично зображується трьома опорними стержнями, що не лежать в одній площині (рис. 58,в). Перешкоджаючи всім лінійним зміщенням опорного перерізу, ця опора дає змогу йому вільно обертатися навколо осей x, y, z . Інакше кажучи, вона накладає три в'язі, залишаючи стільки ж ступенів вільності.

Затискаюча нерухома опора або затиснення (рис. 58,г) являє собою жорстке з'єднання стержнів з "землею". Ця опора перешкоджає всім шести можливим у просторі переміщенням опорного перерізу, отже, вона накладає шість в'язей. Число ступенів вільності такої опори дорівнює нулю.

Щоб виконати *кінематичний аналіз* просторової системи, треба знайти число її ступенів вільності. Зобразимо споруду як систему геометрично незмінюваних просторових частин - блоків. Кожний такий просторовий блок має шість ступенів вільності. З'єднання двох блоків простим сферичним шарніром накладає три в'язі, що перешкоджають взаємним лінійним зміщенням цих блоків. Як і в плоских системах, *простим* називають сферичний шарнір, що з'єднує два блоки. При більшому числі з'єднаних блоків шарнір називають *складним* або *кратним*. Такий шарнір можна замінити $B - 1$ простими шарнірами (B - число з'єднаних блоків).

Ураховуючи вищесказане, одержуємо формулу для визначення числа ступенів вільності просторової системи:

$$W = 6B - 3Ш - C_o, \quad (40)$$

де: B - число блоків системи; $Ш$ - число простих кульових шарнірів;

C_o - число опорних в'язей.

Як і для плоских систем, умова $W > 0$ означає, що система геометрично змінювана, а умова $W \leq 0$ (41) є необхідною, але недостатньою умовою геометричної незмінюваності. Тому після встановлення числа ступенів вільності при виконанні умови (41) треба виконати *геометричний аналіз* споруди.

Як і для плоских систем, статичною ознакою геометричної незмінюваності просторових систем є однозначність та скінченність усіх її зусиль.

При $W = 0$ геометрично незмінювана споруда є статично визначуваною, при $W < 0$ - статично невизначуваною.

6.2. Просторові ферми

Просторовою фермою називають систему прямолінійних стержнів, що не лежать в одній площині, з'єднаних на кінцях кульовими шарнірами (рис. 56,а). Передбачається, що навантаження прикладається у вузлах ферми. Тоді в стержнях ферми виникають тільки поздовжні сили (розтяг або стиск).

При розрахунку просторових статично визначуваних ферм, як і плоских ферм, спочатку обчислюють опорні реакції. Для цього можна використати шість рівнянь рівноваги ферми, наприклад,

$$\sum M_{0x} = 0; \sum M_{0y} = 0; \sum M_{0z} = 0; \sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0.$$

Для визначення зусиль у стержнях просторових статично визначуваних ферм застосовують метод перерізів (п. 2.1).

Метод перерізів реалізується способами вирізання вузлів, наскрізного перерізу, розкладання на плоскі ферми.

Спосіб вирізання вузлів полягає в тому, що у фермі послідовно вирізають вузли і знаходять зусилля в стержнях, які сходяться в кожному вузлі, складанням і вирішенням рівнянь рівноваги. Першим вирізають вузол, у якому сходяться не більше трьох стержнів, і записують три рівняння рівноваги – рівність нулю сум проекцій на кожен з трьох осей координат. Після розв'язання системи рівнянь і визначення зусиль у стержнях цього вузла розглядають інші вузли в такому порядку, при якому кожний наступний вузол може містити не більше трьох невідомих зусиль стержнів.

У фермі, зображеній на рис. 59, розрахунок починається з вузла 1, у якому сходяться три стержні й прикладена зовнішня сила F . Невідомі зусилля вважаємо розтягуючими (зусилля спрямовуємо від вузла). Складаємо рівняння рівноваги: $\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0$. Розв'язуючи рівняння, знаходимо зусилля в стержнях $N_{1-2}, N_{1-3}, N_{1-4}$. Далі розглядаємо вузол 4, у якому невідомими є зусилля $N_{4-2}, N_{4-3}, N_{4-7}$. Після визначення цих зусиль переходимо до вузлів 3 та 2.

Як і в плоских системах (п. 3), в просторових фермах трапляються окремі випадки рівноваги вузлів, що наведені на рис. 60. Користуючись цими схемами, можна заздалегідь визначити, у яких стержнях при заданому навантаженні зусилля дорівнюють нулю (нульові стержні). Ці стержні знаходять на основі таких ознак:

- якщо в ненавантаженому вузлі ферми сходяться три стержні, що не лежать в одній площині (рис. 60,а), то зусилля в усіх цих стержнях дорівнюють нулю, тобто $N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0$;

- якщо у вузлі ферми всі стержні, крім одного, лежать в одній площині й зовнішнє навантаження розташоване в цій площині (рис. 60,б), то зусилля в окремо розміщеному стержні дорівнюватиме нулю: $N_4 = 0$.

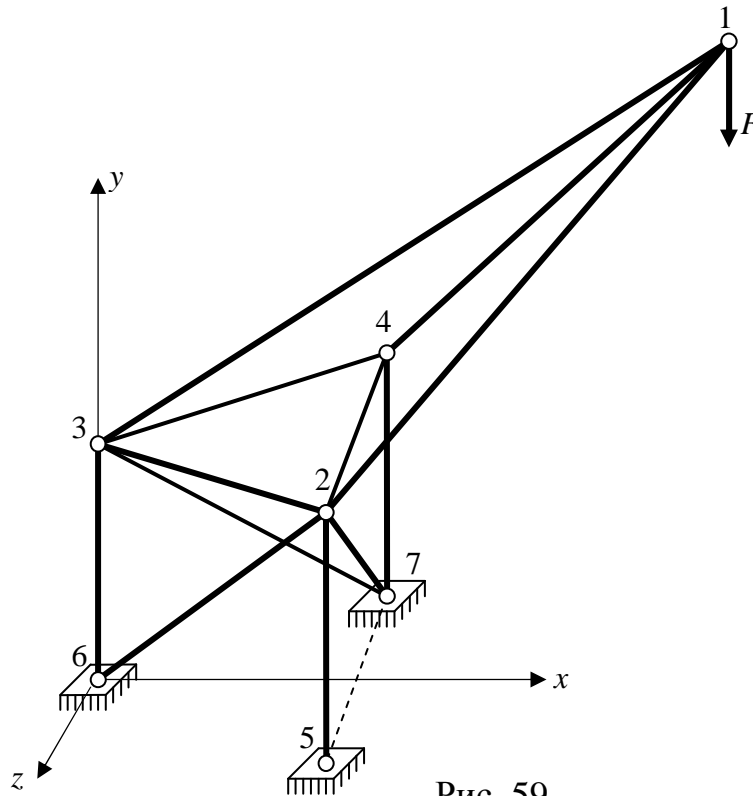


Рис. 59

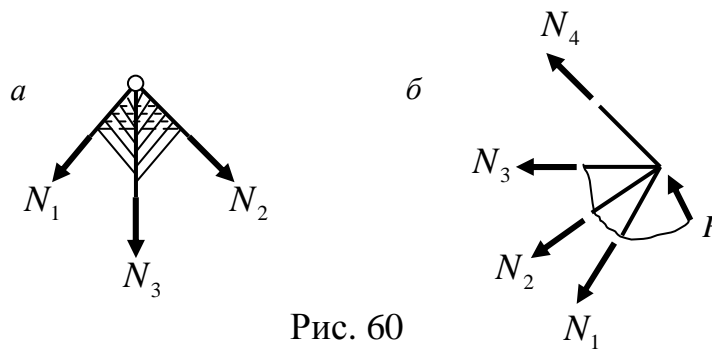


Рис. 60

Спосіб наскрізного перерізу застосовують тоді, коли ферму можна розрізати на дві частини, перетнувши при цьому не більше шести стержнів, зусилля у яких невідомі. Умови рівноваги відокремленої частини ферми дозволяють визначити зусилля в розрізаних стержнях. Для запису цих умов використовують суми проекцій сил на три довільних осі й суми моментів сил відносно трьох довільних осей. Останні намагаються вибрати так, щоб у кожне рівняння рівноваги входило мінімальне число невідомих зусиль.

Спосіб розкладання просторової ферми на плоскі застосовують тоді, коли бічні грані просторової ферми є плоскими. Навантаження, прикладене у вузлах, розкладають на складові, що лежать у площинах суміжних граней ферми, і розглядають кожну грань як плоску ферму. Зусилля в стержнях, розташованих на ребрах багатогранника, знаходять як суму зусиль, одержаних із розрахунку суміжних граней.

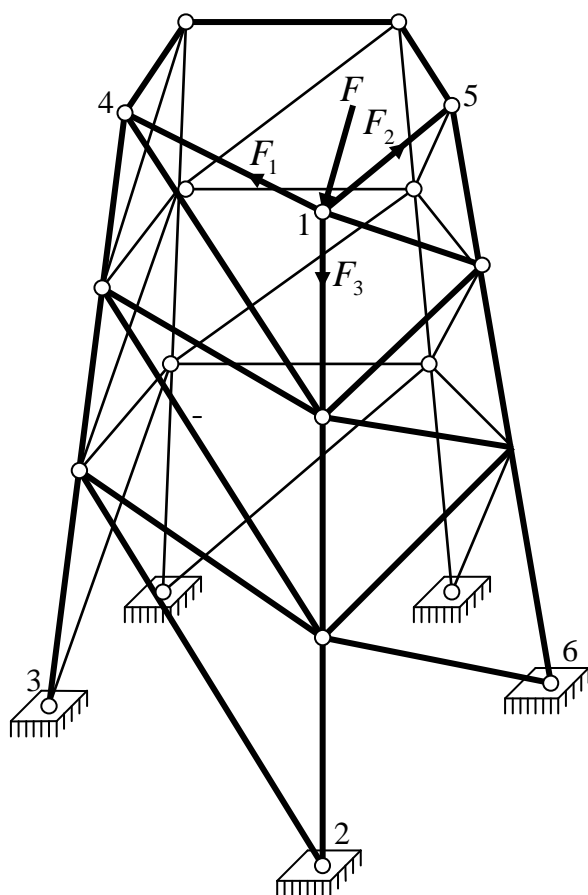


Рис. 61

Для ферми на рис. 61 зовнішню силу F , прикладену до вузла 1, розкладаємо на складові F_1 , F_2 та F_3 . Плоська ферма 1-2-3-4 розраховується на дію сили F_1 , ферма 1-5-6-2 – на дію F_2 . Складову F_3 можна врахувати при розрахунку будь-якої з цих ферм. Повні зусилля в стержнях ребра 1-2 визначаються алгебраїчним підсумовуванням зусиль від цих складових навантаження.

6.3. Просторові рами

У стержнях просторової рами в загальному випадку діють шість внутрішніх зусиль (рис. 62): згинаючі моменти M_z й M_y , крутний момент M_x , поперечні сили Q_z й Q_y , поздовжня сила N .

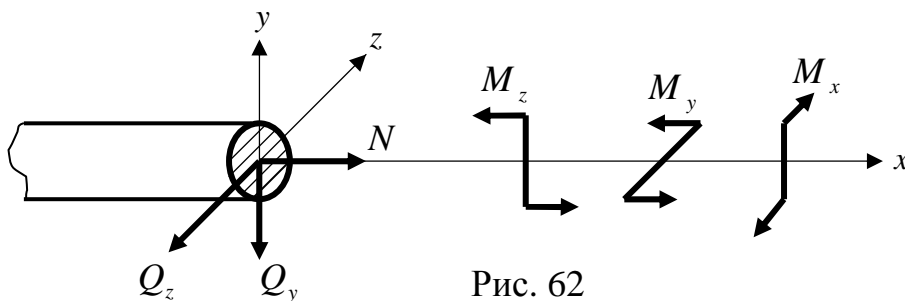


Рис. 62

Визначення цих зусиль у стержнях просторової статично визначуваної рами можна виконати методом перерізів. Так, згинаючий момент M_z дорівнює сумі моментів сил, які діють на одну з відсічених частин відносно осі z перерізу. Правило знаків для всіх зусиль, окрім поздовжньої сили N , беруть умовним. Епюри

згинаючих моментів M_z й M_y будують, як і для плоских систем, з боку розтягнутих волокон. Правило знаків для поздовжніх сил звичайне: розтяг – "плюс", стиск – "мінус". Приклад побудови епюр для просторового стержня показаний на рис. 63.

Зокрема зусилля у перерізі біля затиснення рами становлять:

$$M_y = F a - (q a) a = 0; \quad M_z = (q a) \frac{a}{2} = \frac{q a^2}{2}; \quad M_x = F a = q a^2;$$

$$N = -q a; \quad Q_y = 0; \quad Q_z = F = q a.$$

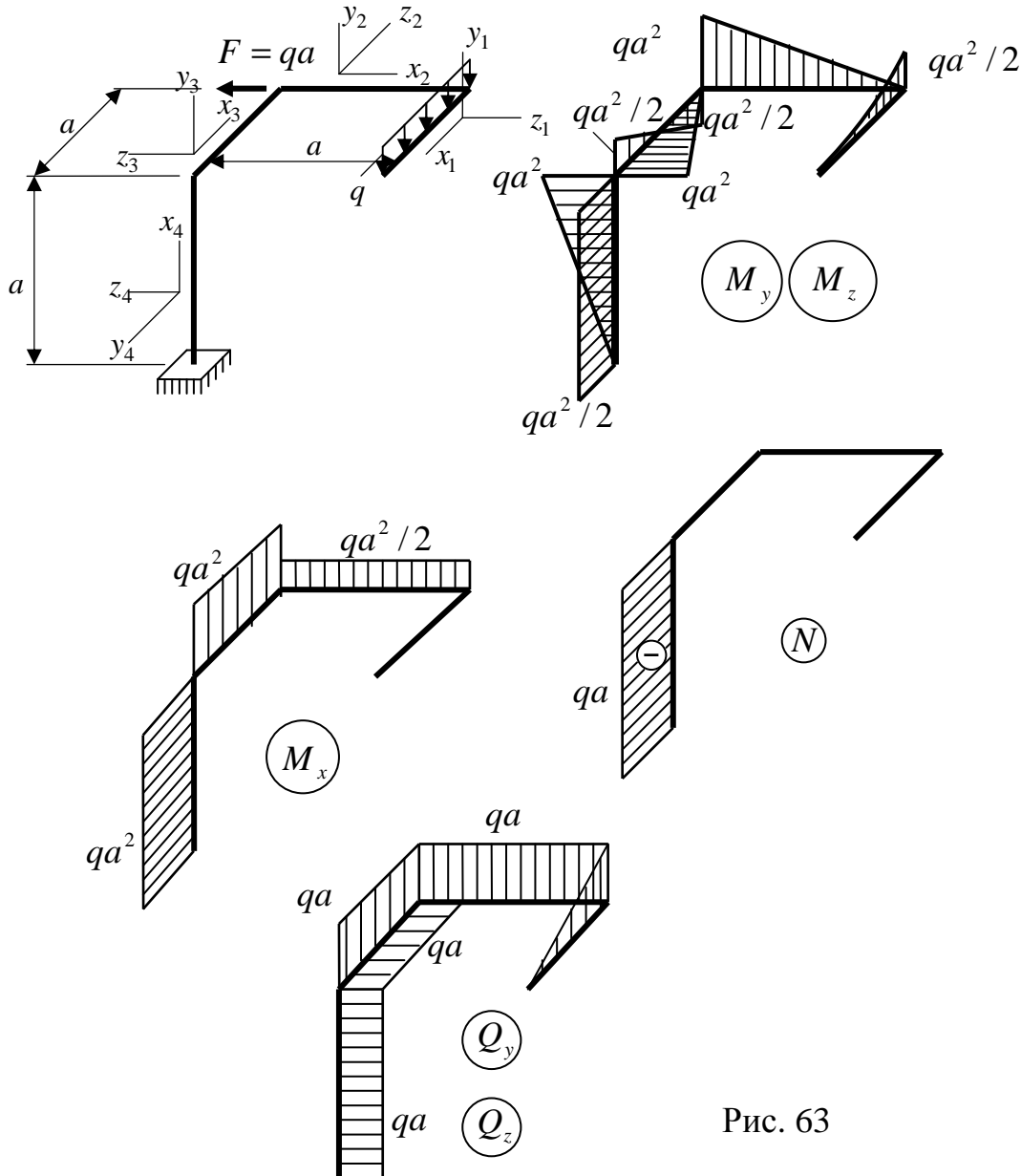


Рис. 63

Запитання для самоконтролю

1. Що називається просторовою стержневою системою?
2. На які види поділяються просторові системи за характером утворення?
3. Які типи опор зустрічаються в просторових системах?
4. Як виконують кінематичний аналіз просторових систем?
5. Назвіть окремі випадки рівноваги вузлів просторової системи.
6. Як застосовується спосіб вирізання вузлів?
7. Як застосовується спосіб наскрізного перерізу?
8. У чому суть способу розкладання просторової ферми на плоскі?

7. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Розрахунок статично невизначуваних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є розглянутий у цьому розділі *метод Мора*.

Виведення формул для визначення переміщень за методом Мора можна зробити на основі принципу можливих переміщень. Цей принцип є універсальним законом механіки. Він, зокрема, використовується при доведенні основних енергетичних теорем для пружних систем.

Нагадаємо формулювання принципу можливих переміщень. *Якщо система знаходиться в рівновазі, сума робіт усіх її зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.*

Якщо роботу зовнішніх сил позначити W , а роботу внутрішніх сил - U , то принцип можливих переміщень можна виразити формулою:

$$W + U = 0. \quad (42)$$

Нагадаємо, що можливим переміщенням є довільне нескінченно мале переміщення, якому не заважають накладені на систему в'язі. Можливі переміщення відраховуються від стану рівноваги системи. При цьому через їх мализну передбачається, що умови рівноваги системи не порушуються, тобто зусилля не змінюються.

Розглянемо спочатку визначення роботи зовнішніх і внутрішніх сил і деякі теореми для пружних систем.

7.1. Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення

Як відомо, робота обчислюється як добуток постійного за величиною силового фактора на переміщення в напрямку цього фактора. Наприклад, робота сили F дорівнює добутку цієї сили на шлях, пройдений у напрямку сили, робота моменту (пари сил) – добутку моменту на кут повороту в напрямку цього моменту та ін. Для загальності міркувань у будівельній механіці застосовують поняття узагальненої сили й узагальненого переміщення.

Узагальненою силою можна назвати будь-яку силу або групу сил (пару сил, розподілене навантаження, дві сили, що розтягують чи стискають стержень та інші комбінації навантаження), що прикладені до системи.

Узагальненим переміщенням називають таке переміщення, на якому відповідна узагальнена сила виконує роботу, тобто це множник при узагальненій силі у виразі її роботи.

Окремі види узагальнених сил та відповідних узагальнених переміщень наведені на рис. 64.

Так, якщо точка C , у якій прикладена зосереджена сила F , зміщується на Δ_C у положення C' (рис. 64,а), узагальненим переміщенням, що відповідає цій силі, є складова Δ повного переміщення, а робота сили дорівнює $F \Delta$.

При дії двох однакових спрямованих назустріч сил вздовж прямої CD (рис. 64,б) узагальненою силою будуть ці дві сили F , а узагальненим переміщенням – скорочення відстані між точками C та D : $\Delta = \Delta_C + \Delta_D$.

Зосереджений момент M , прикладений до стержня CD (рис. 64,в) також може розглядатися як узагальнена сила і позначатися F . Узагальненим переміщенням у цьому випадку буде поворот стержня $\Delta = \theta$.

Аналогічно можна показати, що узагальненій силі у вигляді двох однакових протилежно спрямованих моментів (рис. 64,г) відповідає зміна кута у шарнірі C між стержнями CD та CB : $\Delta = \theta_{CD} + \theta_{BC}$.

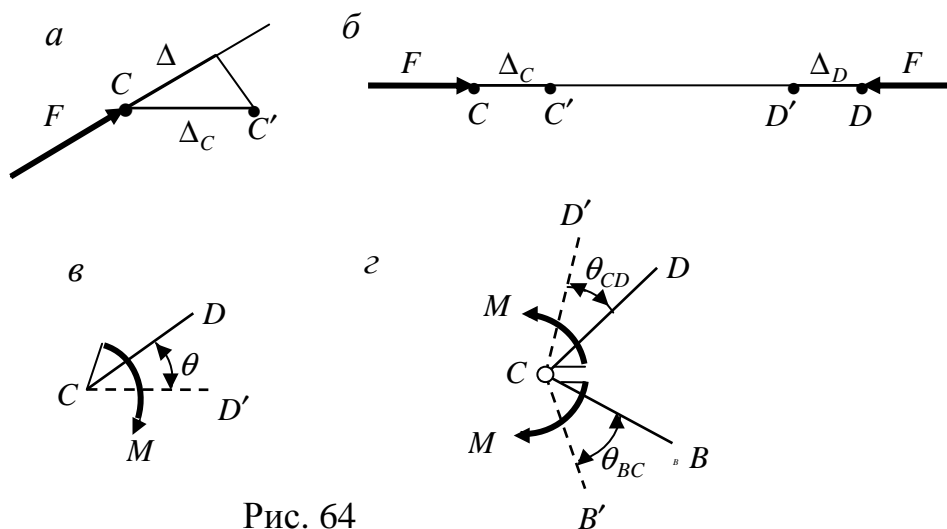


Рис. 64

Зазвичай узагальнену силу позначають літерою F із порядковим індексом, а узагальнене переміщення - Δ із двома індексами, перший з яких указує точку й напрямок переміщення (переважно цей індекс відповідає індексу узагальненої сили, що діє в напрямку даного переміщення); другий індекс указує причину, що викликала це переміщення (індекс сили, температурний вплив, зміщення опор та ін.).

При розв'язанні низки задач зручно замість дійсних навантажень вводити одиничні сили або моменти. Переміщення від цих навантажень позначають δ з тими самими індексами, що й переміщення від довільних за величиною навантажень.

Як і раніше, розглядатимемо тільки лінійно деформовані системи, тобто системи, для яких залежність між переміщеннями й навантаженнями має лінійний характер. Для таких систем справедливими є такі співвідношення:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot F_k; \quad (43)$$

$$\Delta_{if} = \delta_{i1} \cdot F_1 + \delta_{i2} \cdot F_2 + \delta_{i3} \cdot F_3 + \dots \quad (44)$$

Тут Δ_{ik} - переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили від дії узагальненої сили F_k , а δ_{ik} - переміщення в напрямку тієї самої узагальненої сили F_i від дії узагальненої сили $F_k = 1$.

Роботу зовнішніх (внутрішніх) сил на можливих переміщеннях називають *можливою роботою* зовнішніх (внутрішніх) сил. Для лінійно деформованих систем при обчисленні робіт у виразі (42) замість нескінченно малих можливих переміщень можуть розглядатися малі скінченні переміщення. Зокрема, через довільність можливих переміщень ними можуть бути переміщення, викликані будь-якою силою чи групою сил.

Розглянемо деяку пружну систему (рис. 65), завантажену статично прикладеною силою F_i . Статичний характер завантаження передбачає повільне зростання значення сили від нуля так, що прискорення точок системи малі й силами інерції можна знехтувати.

У процесі завантаження система деформується, і точка прикладання сили F_i переміщується в напрямку сили на величину Δ_{ii} . Залежність між силою й переміщенням при статичному завантаженні на графіку виражається прямою лінією (рис. 66). Приросту dF сили відповідає приріст переміщення $d(\Delta)$. При цьому виконується робота $dW = (F + dF) d(\Delta)$. Розкриваючи дужки та нехтуючи нескінченно малою величиною другого порядку мализни, одержимо: $dW = F d(\Delta)$. Після інтегрування одержимо:

$$W_{ii} = \int_0^{\Delta_{ii}} F d(\Delta) = \frac{1}{2} F_i \cdot \Delta_{ii} \quad (45)$$

Отже, робота, що виконується силою F_i , відповідає площі заштрихованої частини графіка (рис. 66) і називається *дійсною роботою сили* F_i .

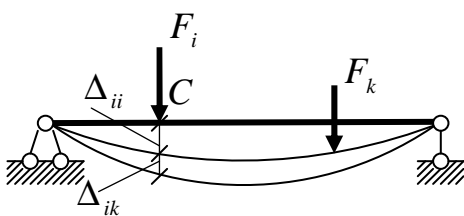


Рис. 65

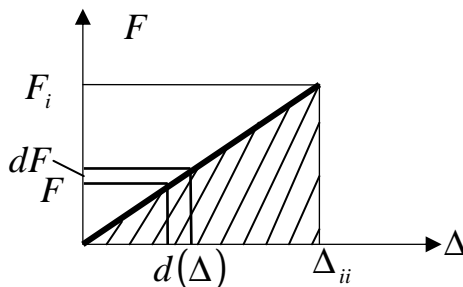


Рис. 66

Якщо тепер до системи (рис. 65) прикласти додаткову силу F_k , точка прикладання сили F_i одержить додаткове переміщення Δ_{ik} . Сила F_i при цьому залишається постійною й виконує роботу:

$$W_{ik} = F_i \cdot \Delta_{ik} \quad (46)$$

Переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки C . Тоді робота W_{ik} буде називатися *можливою роботою сили* F_i .

Порівнявши вирази (45) та (46), бачимо, що дійсна робота сили відрізняється від можливої роботи коефіцієнтом $1/2$.

7.2. Робота внутрішніх сил

Для визначення робіт внутрішніх сил розглянемо ту саму балку на рис. 65. У зв'язку з тим, що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в

ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки (рис. 67): у одному з них (i -му) діє сила F_i , а в другому (k -му) – сила F_k . Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент з довжиною dx . У i -му стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 68,а), у k -му – M_k та Q_k (рис. 68,б). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

Дія зусиль M_k у k -му стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює χ_k , а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 68,в). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 68,г) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в i -му стані на переміщеннях k -го стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx. \quad (47)$$

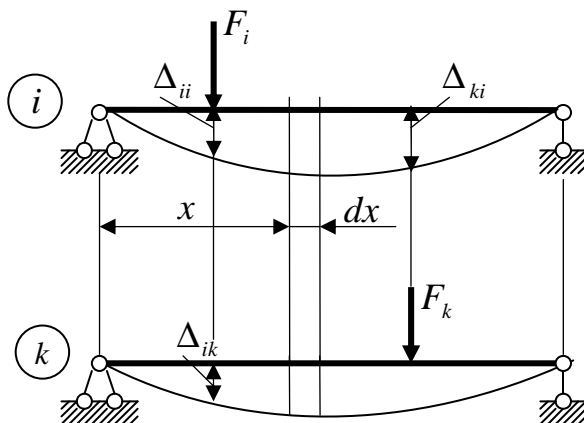


Рис. 67

Знак "мінус" пояснюється тим, що зусилля M_i та Q_i є зовнішніми відносно елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм, тобто в сторону, зворотну переміщенням $\chi_k dx$ та $\gamma_k dx$. Деформації χ_k – кривина осі й γ_k – кут зсуву визначаються за відомими з опору матеріалів формулами:

$$\chi_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EI}, \quad \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{GA}, \quad (48)$$

де $\mu = A \int_{(A)} \left(\frac{S_z}{I_z b} \right)^2 dA$ – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі й залежить від форми поперечного перерізу.

Підставляючи вирази для χ_k та γ_k в (47), проінтегруємо обидві частини рівняння за довжиною балки. Внаслідок одержимо можливу роботу внутрішніх сил стану « i » на переміщеннях стану « k »:

$$U_{ik} = - \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{EI} dx - \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{GA} dx. \quad (49)$$

У загальному випадку деформації плоскої системи в рівняння (49) додається робота поздовжніх сил N_i . При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати

переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s , що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил запишемо так:

$$U_{ik} = -\sum \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E I} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G A} ds - \sum \int_{(l)} \frac{N_i N_k}{E A} ds. \quad (50)$$

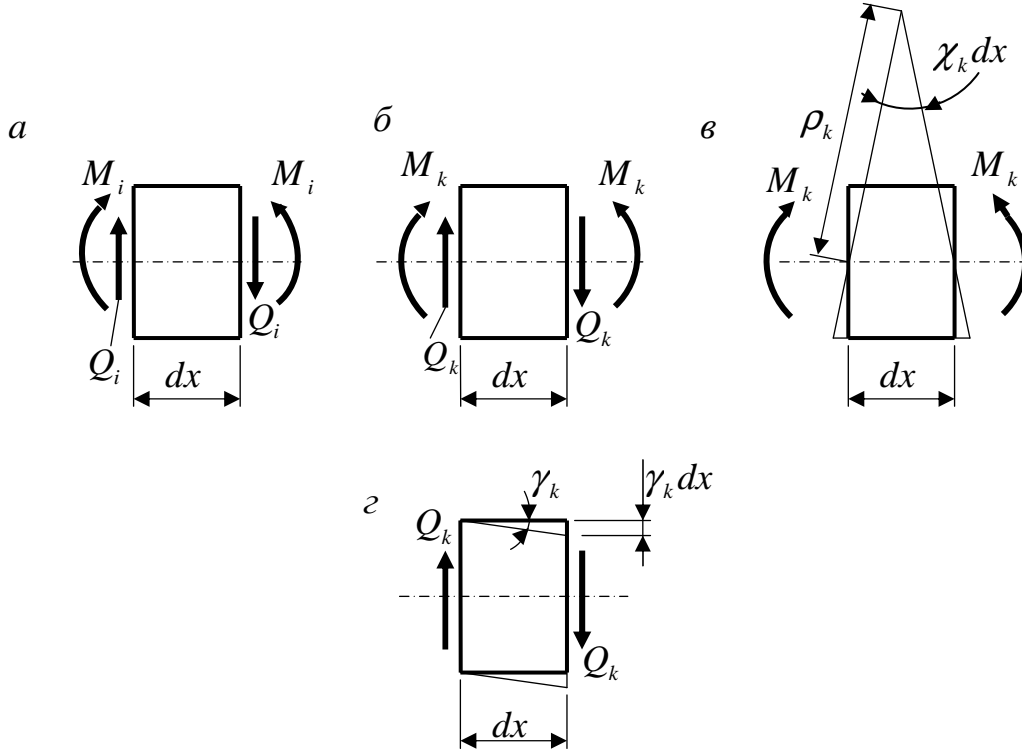


Рис. 68

За аналогією з (50) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii} , враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i , Q_i і N_i і лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = -\frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{M_i^2 ds}{E I} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i^2 ds}{G A} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{N_i^2 ds}{E A}. \quad (51)$$

У подальшому позначку (l) біля інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізка системи, іноді відкидатимемо.

7.3. Потенціальна енергія деформації. Теорема Лагранжа та Кастіліано

Робота внутрішніх сил, яка буде виконана внутрішніми силами при розвантаженні системи, є *потенціальною енергією деформації системи*.

Отже, $U = -U_{ii}$ тобто:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{M^2 ds}{E I} + \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q^2 ds}{G A} + \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{N^2 ds}{E A}. \quad (52)$$

З іншого боку, енергія деформації системи дорівнює роботі прикладених до неї зовнішніх сил, виконаних при статичному завантаженні системи:

$$U = W. \quad (53)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i. \quad (62)$$

Залежність (61) є виразом **теорему Кастіліано**: для системи, що знаходиться в рівновазі, похідна від потенціальної енергії деформації за узагальненою силою дорівнює відповідному узагальненому переміщенню.

Аналогічно залежність (62) відображає **теорему Лагранжа**: для системи, що знаходиться в рівновазі, похідна від потенціальної енергії деформації за переміщенням дорівнює відповідній узагальненій силі.

Теорема Кастіліано може використовуватись для визначення переміщень, але викладений нижче метод Мора для пружних систем надає простіші обчислення.

7.4. Теорема про взаємність

Розглянемо знову два стани пружної системи (рис. 67). Переміщення k -го стану є можливими переміщеннями для сил i -го стану цієї системи. Тоді на основі принципу можливих переміщень з урахуванням у загальному випадку поздовжніх сил одержуємо:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= F_i \cdot \Delta_{ik} = -U_{ik} = \\ &= \sum \int_{(I)} \frac{M_i M_k dx}{EI} + \sum \int_{(I)} \mu \frac{Q_i Q_k dx}{GA} + \sum \int_{(I)} \frac{N_i N_k dx}{EA}. \end{aligned} \quad (63)$$

З іншого боку, переміщення i -го стану також можуть розглядатися як можливі переміщення для сил k -го стану. Тоді:

$$\begin{aligned} W_{ki} &= F_k \cdot \Delta_{ki} = -U_{ki} = \\ &= \sum \int_{(I)} \frac{M_k M_i dx}{EI} + \sum \int_{(I)} \mu \frac{Q_k Q_i dx}{GA} + \sum \int_{(I)} \frac{N_k N_i dx}{EA} \end{aligned} \quad (64)$$

Праві частини виразів (63) та (64) відрізняються тільки порядком запису співмножників – внутрішніх зусиль, отже,

$$U_{ik} = U_{ki}, \quad W_{ik} = W_{ki}. \quad (65)$$

Ці рівності відображають **теорему про взаємність робіт (теорему Бетті)**, що може бути сформульована так: *робота зовнішніх (внутрішніх) сил i -го стану системи на переміщеннях (деформаціях) k -го стану дорівнює роботі зовнішніх (внутрішніх) сил k -го стану тієї самої системи на переміщеннях (деформаціях) i -го стану.*

З теореми про взаємність робіт випливає кілька окремих теорем. Розглянемо два стани пружної системи, у кожному з яких діють однакові узагальнені сили $F_i = F_k = F$. Застосовуючи до цих двох станів системи теорему про взаємність робіт, одержимо рівність $F \cdot \Delta_{ik} = F \cdot \Delta_{ki}$, звідки маємо:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki}. \quad (66)$$

Якщо узагальнені сили дорівнюють одиниці ($F_i = F_k = 1$), остання рівність набуває вигляду:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}, \quad (67)$$

що виражає **теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла)**: *переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили, викликане дією k -ї одиничної*

узагальненої сили, дорівнює переміщенню тієї самої системи в напрямку k -ї узагальненої сили, викликаному дією i -ї одиничної узагальненої сили.

Розглянемо тепер два стани пружної системи (рис. 70), в одному з яких задано одиничне переміщення i -ї, а у другому - k -ї в'язі. При цьому в інших в'язях статично невизначуваної системи з'являються реакції, що відповідно дорівнюють: в k -й в'язі i -го стану - r_{ki} , в i -й в'язі k -го стану - r_{ik} . Ці реакції є зовнішніми силами і виконують роботу $W_{ik} = r_{ki} \cdot \Delta_k$, $W_{ki} = r_{ik} \cdot \Delta_i$. У напрямку решти реакцій переміщення відсутні, тому їх робота дорівнює нулю. На основі теореми про взаємність робіт одержуємо $r_{ki} \cdot \Delta_k = r_{ik} \cdot \Delta_i$ або

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (68)$$

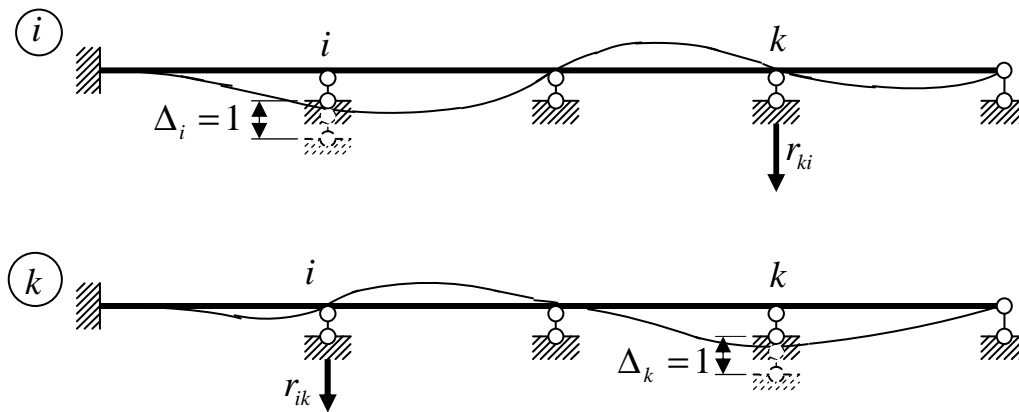


Рис. 70

Таким чином, реакція в i -й в'язі, викликана одиничним переміщенням k -ї в'язі, дорівнює реакції k -ї в'язі тієї самої системи, викликаній одиничним переміщенням i -ї в'язі (теорема про взаємність реакцій, або перша теорема Релєя).

Нарешті, третій, окремий, випадок теореми про взаємність робіт одержуємо при порівнянні двох станів системи, коли в одному з них прикладена одинична сила $F_i = 1$, а в іншому задано одиничне зміщення k -ї в'язі (рис. 71).

У зв'язку з тим, що в i -му стані в'язі залишаються нерухомими, робота зовнішніх сил стану k дорівнює нулю: $W_{ki} = 0$. Тоді повинна бути нульовою і робота W_{ik} :

$$W_{ik} = F_i \cdot \delta_{ik} + r_{ki} \cdot \Delta_k = 0,$$

Звідки

$$\delta_{ik} = -r_{ki}. \quad (69)$$

Ця рівність є виразом **теореми про взаємність реакцій і переміщень (другої теореми Релєя)**: переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили, викликане одиничним зміщенням k -ї в'язі, дорівнює за величиною і протилежне за знаком реакції в k -й в'язі тієї самої системи, викликаній i -ю одиничною узагальненою силою.

Теореми про взаємність знаходять широке застосування в розрахунках статично невизначуваних систем, а також використовуються для побудови ліній впливу зусиль і переміщень.

Приклад практичного використання теореми про взаємність переміщень наведений у [8]. Визначення прогинів Δ_{1C} , Δ_{2C} , Δ_{3C} точок 1, 2, 3 від сили F , що діє у перерізі C (рис. 72,а), простіше замінити визначенням переміщень Δ_{C1} , Δ_{C2} , Δ_{C3}

точки C від сили F , розташованої відповідно у т.т. 1 (рис. 72,б), 2 (рис. 71,в), 3 (рис. 72,г).

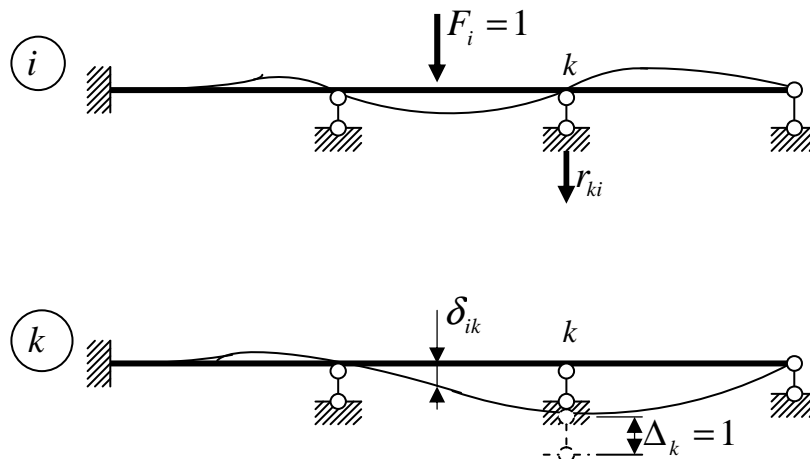


Рис. 71

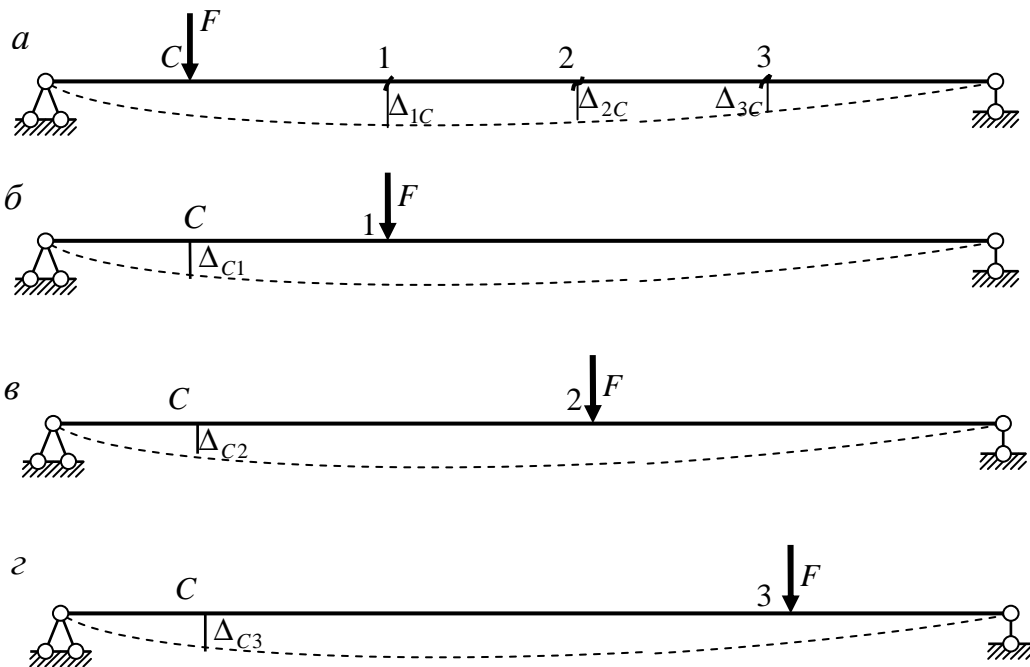


Рис. 72

7.5. Обчислення переміщень за методом Мора

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки споруди від дії заданого навантаження (рис. 73,а). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 73,а), другий – допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 73,б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{if} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (50):

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q \bar{Q}_i ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N \bar{N}_i ds}{EA}, \quad (70)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (70) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження в плоскій системі. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;

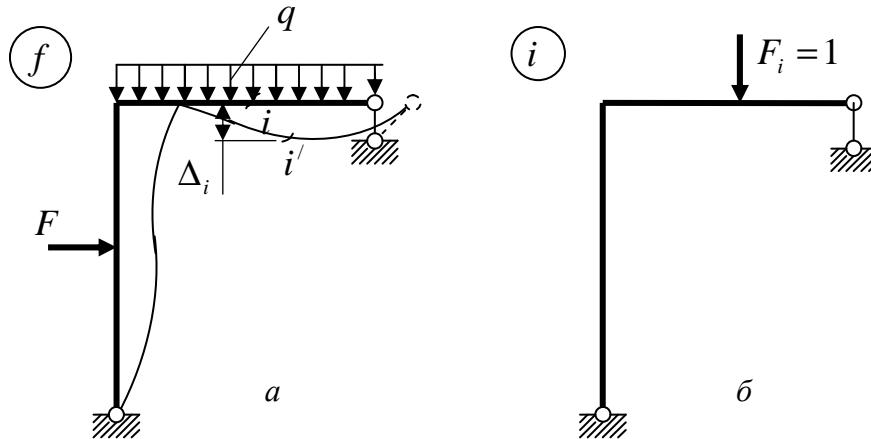


Рис. 73

- 3) знаходять зусилля $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ від одиничної сили;
- 4) вирази зусиль підставляють у праву частину (70) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (70) називають *методом Мора*.

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. Так, при розрахунку ферм, у стержнях яких виникають лише поздовжні зусилля, перші два інтеграли дорівнюють нулю. Тоді, розбивши інтеграл, що залишився, на суму інтегралів для окремих стержнів, одержуємо:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int \left(\frac{N \bar{N}_i ds}{E A} \right)_k$$

або, беручи до уваги постійність зусиль і жорсткостей у межах кожного стержня,

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{N \bar{N}_i l}{E A} \right)_k. \quad (71)$$

Тут сума поширюється на всі стержні ферми, n - число стержнів.

При розрахунку систем із переважним згином – балок і рам – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (70), тобто

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI}. \quad (72)$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int_l M \overline{M}_i ds \right)_j. \quad (73)$$

Інтеграл $\int_l M \overline{M}_i ds$ у (73) називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити. Наприклад, якщо на відрізку прямого стержня постійної жорсткості одна з епюр згинаючих моментів (зазвичай одинична) прямолінійна (рис. 74), інтеграл можна обчислити за *правилом Верещагіна*.

Для цього продовжимо лінійну епюру \overline{M}_i до перетину з віссю i в цій точці (т. O) виберемо початок координат. На відстані s від початку координат ординати криволінійної і лінійної епюр відповідно дорівнюють M і y . Виразимо y через кут нахилу α лінійної епюри: $y = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$ і підставимо в інтеграл. Тоді

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \int_0^l M \cdot s \cdot \operatorname{tg} \alpha ds$$

або, виносячи $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$, одержимо:

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l M \cdot s ds \quad (74)$$

Інтеграл у правій частині виразу (74) являє собою статичний момент S_z епюри M відносно осі z , що проходить через початок координат. Якщо відома площа ω епюри M і координата s_o її центру ваги, то статичний момент можна одержати інакше: $S_z = \int_0^l M \cdot s ds = \omega \cdot y_o$.

Підставляючи цю рівність в (74), одержимо $\int_0^l M \overline{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega \cdot s_o$. Але $s_o \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_o$, де y_o - ордината лінійної епюри \overline{M}_i під центром ваги епюри M . Тоді остаточно отримуємо таку рівність:

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \omega \cdot y_o. \quad (75)$$

Отже, інтеграл $\int_0^l M \overline{M}_i ds$ дорівнює добутку площі ω криволінійної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_o прямолінійної епюри.

Таке обчислення інтеграла називають *перемноженням епюр за правилом Верещагіна*. Результат перемноження додатний, якщо обидві перемножені епюри M і \overline{M}_i розташовані з одного боку від осі (одного знака), й від'ємні - при розташуванні епюр по різні боки від осі.

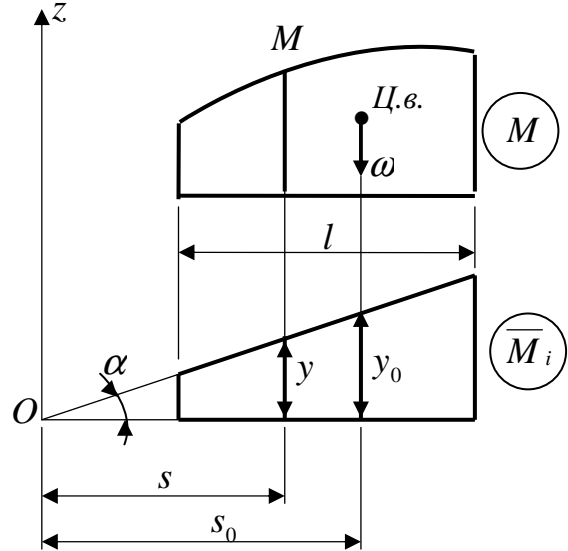


Рис. 74

Правило Верещагіна зручно застосовувати в тих випадках, коли площа й положення центру ваги криволінійної епюри знаходяться досить просто. Як правило, це раціонально робити тоді, коли епюра, на якій береться площа, відповідає одній із наведених на рис. 75, а друга – лінійна.

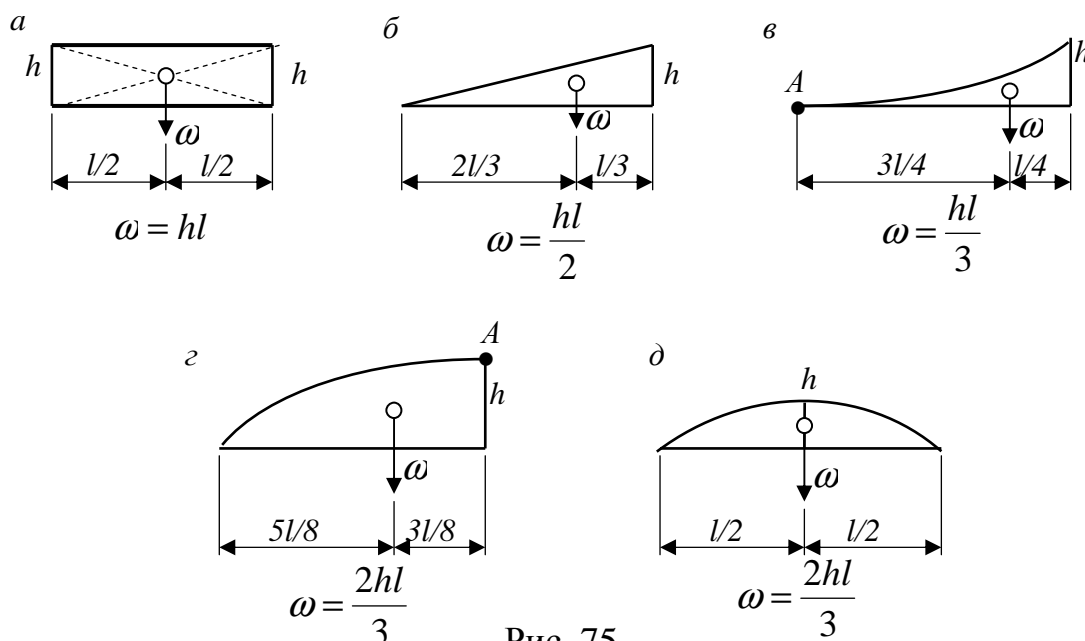


Рис. 75

Зауважимо, що всі нелінійні епюри на рис. 75 відповідають рівномірно розподіленому навантаженню $q = \text{const}$. Увігнутий параболічний трикутник (рис. 75,в) та опуклий параболічний трикутник (рис. 75,г) повинні мати вершини в точках A , позначених на рисунку. Це можна перевірити за значенням ординати h . Вона повинна дорівнювати $\frac{ql^2}{2}$.

У загальному випадку раціональніше скористатися формулою Сімпсона для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізку $0 \leq s \leq l$ можна наближено знайти таким чином:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ - це дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 76), одержуємо:

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \frac{l}{6} \left(M_{\text{лів}} \overline{M}_{\text{лів}} + 4M_{\text{сер}} \overline{M}_{\text{сер}} + M_{\text{пр}} \overline{M}_{\text{пр}} \right). \quad (76)$$

Тут індекси *лів*, *сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка з довжиною l . Як свідчить аналіз, формула (76) для задач обчислення переміщень є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M \overline{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, описані за

квадратною параболою (при $q = const$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках. В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини. Формула Сімпсона дозволяє записати алгоритм визначення переміщень у матричній формі:

$$\Delta = \vec{M}^T \vec{L} M, \quad (77)$$

де: $\vec{M} = \begin{bmatrix} \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \\ \vdots \\ \vec{M}_n \end{bmatrix}$ - вектор одиничних моментів;

$\vec{L} = \begin{bmatrix} \vec{L}_1 \\ \vec{L}_2 \\ \vdots \\ \vec{L}_n \end{bmatrix}$ - матриця піддатливості;

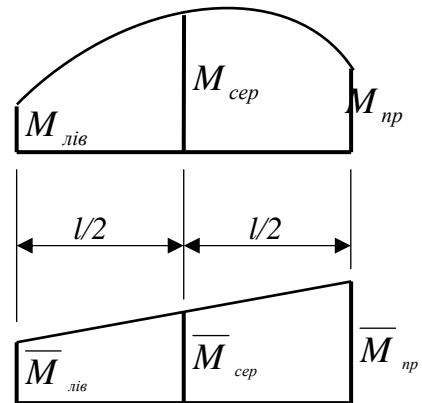


Рис. 76

$\vec{M} = \begin{bmatrix} \vec{M}_1 \\ \vec{M}_2 \\ \vdots \\ \vec{M}_n \end{bmatrix}$ - вектор моментів від навантаження.

Усі наведені вектори та матриця – блочні, тобто такі, елементами яких є матриці. Зокрема:

$\vec{M}_i = \begin{bmatrix} \vec{M}_{лів} \\ \vec{M}_{сер} \\ \vec{M}_{прав} \end{bmatrix}$ - вектор, який містить моменти на лівому, правому кінцях

та середині i -ї ділянки епюри моментів від одиничної узагальненої сили, прикладеної у напрямку шуканого переміщення;

$\vec{L}_i = \begin{bmatrix} \frac{EI}{6l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{6l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \frac{EI}{6l} \end{bmatrix}$ - діагональна матриця піддатливості стержня на

i -й ділянці;

$$\vec{M}_i = \begin{bmatrix} M_{\text{лів}} \\ M_{\text{сер}} \\ M_{\text{прав}} \end{bmatrix} - \text{вектор, що містить моменти від заданого навантаження}$$

на лівому, правому кінцях та посередині i -ї ділянки.

7.6. Переміщення від осідання опор

При переміщеннях (осіданнях) опор статично визначувана споруда (рис. 77,а) переходить у нове положення так, що його елементи не деформуються і, відповідно, у такій системі відсутні зусилля.

Переміщення перерізів статично визначуваної системи можна визначити геометрично. Наприклад, вертикальне переміщення перерізу K рами (рис. 77,а) від зміщень c_1, c_2, c_3 затиснення з урахуванням їхньої мализни становить:

$$\Delta_K = c_1 + l \cdot \operatorname{tg} c_3 \approx c_1 + l \cdot c_3.$$

У складніших випадках для визначення переміщень можна застосувати статичний метод, що ґрунтується на теоремі про взаємність робіт. Покажемо його на прикладі визначення того самого переміщення Δ_K . Прикладемо у напрямку шуканого переміщення одиничну узагальнену силу $F_k = 1$ (рис. 77,б).

Визначивши реакції $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$, врахуємо, що в заданому стані сили відсутні.

Отже, $W_{kc} = W_{ck} = 0$ або $F_k \Delta_k - \bar{R}_1 c_1 - \bar{R}_2 c_2 - \bar{R}_3 c_3 = 0$,

звідки $\Delta_k = \sum \bar{R}_i c_i$. (78)

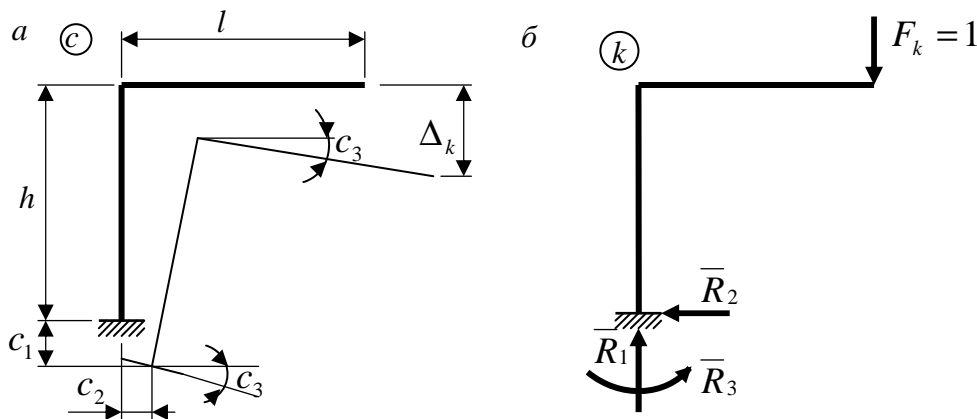


Рис. 77

Отже, для визначення переміщення від осідання опор необхідно визначити реакції опор від одиничної узагальної сили, прикладеної у напрямку шуканого переміщення, і взяти суму добутків цих реакцій \bar{R}_i на відповідні переміщення опор у їхньому напрямку. Знак кожного із цих добутків додатний, якщо реакція та переміщення опори спрямовані у протилежні сторони.

7.7. Переміщення від температурного впливу

Будемо вважати, що переріз елементів (рис. 78,а) має вертикальну вісь симетрії, і температура за висотою перерізу змінюється лінійно так, що зміна тем-

пературі нижнього волокна становить t_1 , а верхнього - t_2 (рис. 78,б). У цьому випадку зсуви відсутні. Виділивши елемент стержня завдовжки dx , одержимо його деформацію як наведено на рис. 78,в.

Позначимо стан системи, у якому прикладена сила $F_i = 1$, індексом i , а стан, в якому задана дія температури, – індексом t . На підставі принципу можливих переміщень маємо:

$$W_{it} = -U_{it},$$

де

$$W_{it} = 1 \cdot \Delta_{it} = \Delta_{it}, \quad U_{it} = - \int_{(l)} \overline{M}_i d\varphi - \int_{(l)} \overline{N}_i \varepsilon dx.$$

За рис. 78,в визначаємо взаємний кут повороту граней елемента завдовжки dx :
 $d\varphi = \frac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$ та подовження волокна на рівні його нейтральної осі - $\varepsilon dx = \alpha t_0 dx$, де $t_0 = \frac{t_1 |y_2| + t_2 |y_1|}{h}$ - зміна температури нейтрального шару елемента (для перерізу, що має горизонтальну вісь симетрії $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$).

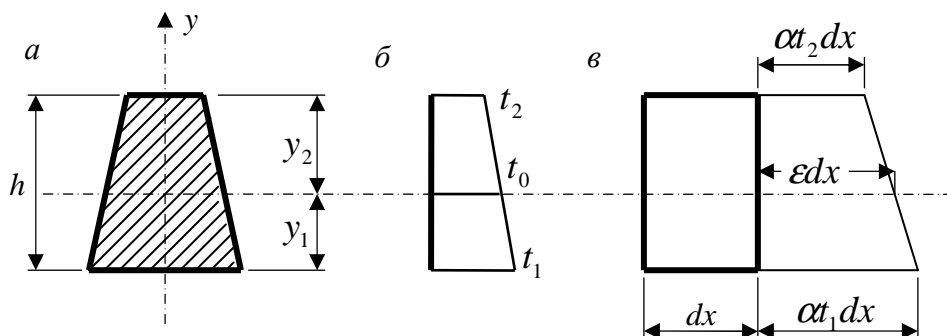


Рис. 78

Отже, для визначення переміщення від температурної дії маємо:

$$\Delta_{it} = \int_{(l)} \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \overline{M}_i dx + \int_{(l)} \alpha t_0 \overline{N}_i dx. \quad (79)$$

Якщо систему розбити на ділянки, в межах кожної з яких α, h, t_1 та t_2 не змінюються, ця формула набуває такого вигляду:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\overline{M}_i} + \sum \alpha t_0 \omega_{\overline{N}_i}, \quad (80)$$

де $\omega_{\overline{M}_i}$ та $\omega_{\overline{N}_i}$ - площі, відповідно, одиничної епюри моментів та одиничної епюри поздовжніх сил на кожній ділянці, взяті з урахуванням їхніх знаків.

Зауважимо, що для балок та рам другим доданком у (79) та (80) можна знехтувати і, навпаки, для ферм дійсними будуть лише другі доданки.

Запитання для самоконтролю

1. Для яких цілей слід обчислювати переміщення?
2. Як формулюється принцип можливих переміщень для пружних систем?
3. Що таке можливе переміщення?
4. Що таке узагальнена сила?

5. Що таке узагальнене переміщення?
6. Як залежать переміщення від навантаження в лінійно деформованих системах?
7. Що розуміється під статичним прикладанням навантаження?
8. Як визначається дійсна робота зовнішніх сил?
9. У чому різниця між дійсною і можливою роботою?
10. Як визначається можлива робота внутрішніх сил?
11. Чим пояснюється наявність знака "мінус" у виразі можливої роботи внутрішніх сил?
12. Як одержати дійсну роботу внутрішніх сил?
13. Як визначається потенціальна енергія деформації системи?
14. Як залежить потенціальна енергія від навантаження? Від переміщень?
15. Які властивості потенціальної енергії?
16. Як формулюється теорема Лагранжа?
17. Наведіть формулювання теореми Кастіліано.
18. Як формулюється й доводиться теорема Бетті про взаємність робіт?
19. Сформулюйте й доведіть теорему Максвелла про взаємність переміщень; теорему про взаємність реакцій; теорему про взаємність переміщень та реакцій.
20. Як записується формула Мора?
21. Які два стани системи необхідно розглядати при визначенні переміщень за методом Мора?
22. Наведіть послідовність обчислення переміщень за методом Мора.
23. Як обирається допоміжний стан при визначенні переміщень за методом Мора?
24. Якого вигляду набуває формула Мора для ферм і для систем з переважаючим згином?
25. Які прийоми застосовуються для обчислення інтеграла Мора?
26. При виконанні яких умов можна застосовувати правило Верещагіна? Формулу Сімпсона?
27. На основі якого принципу одержують вирази для визначення переміщень від осідання опор та від температурних дій?
28. Як визначаються переміщення від осідання опор?
29. Як визначаються переміщення від температурних дій?
30. Що являє собою матриця піддатливості?
31. На основі чого записується матричний алгоритм визначення переміщень?

8. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДЕФОРМОВАНИХ СИСТЕМ

8.1. Повна потенціальна енергія системи

У попередній главі було введено поняття потенціальної енергії, яка накопичується при деформації системи. При цьому зовнішні сили, зміщуючись разом із точками тіла також змінюють потенціальну енергію положення. Отже, у процесі деформування здійснюється обмін енергіями зовнішніх та внутрішніх сил. Тому для повної енергетичної характеристики тіла в деформованому стані необхідно розглядати його повну потенціальну енергію:

$$U_n = U + W. \quad (81)$$

Тут U – енергія внутрішніх сил (сил пружності); W – енергія зовнішніх сил.

Якщо енергію системи в деякому – початковому - стані вважати нульовою, тоді енергія внутрішніх і зовнішніх сил буде вимірюватися роботою, яка виконується ними при переході системи з даного стану в початковий. В якості початкового природно взяти недеформований стан системи.

Розглянемо балку, що знаходиться під дією розподіленого навантаження (рис. 79). Потенціальну енергію внутрішніх сил запишемо за (49), урахувуючи лише згин:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI}.$$

Робота зовнішніх сил буде при розвантаженні від'ємною й запишеться з

урахуванням того, що при переході від навантаженого стану до початкового всі сили залишаються незмінними:

$$W = - \int_0^l y(x) q(x) dx. \quad (82)$$

Ураховуючи залежність $M = EI y''(x)$, вираз роботи внутрішніх сил набуває

$$\text{такого вигляду:} \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y''(x))^2 dx. \quad (83)$$

Отже, для наведеної балки повна потенціальна енергія становить

$$U_n = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y''(x))^2 dx - \int_0^l y(x) q(x) dx. \quad (84)$$

Одержаний вираз свідчить про те, що повна потенціальна енергія системи залежить від функції $y(x)$:

$$U_n = U_n(y)$$

і в математиці називається функціоналом.

Вираз енергії деформації системи в загальному вигляді можна записати так:

$$U = \int \int \int_{(V)} \bar{U} dx dy dz, \quad (85)$$

де \bar{U} - щільність енергії деформації, або питома потенціальна енергія деформації.

Для розглянутого вище прикладу балки вона дорівнює: $\bar{U} = M^2 / 2EI = \frac{1}{2} EI (y'')^2$.

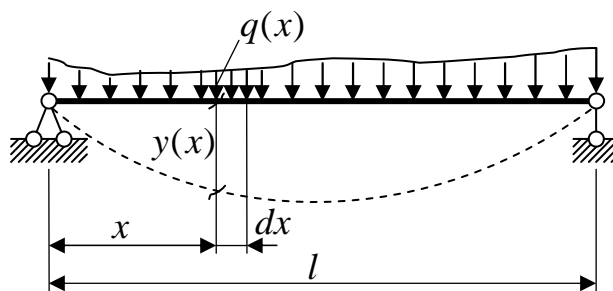


Рис. 79

У загальному випадку об'ємного напруженого стану ця величина запишеться

так:

$$\bar{U} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (86)$$

Поряд з (86) характеристикою деформованої системи існує додаткова енергія деформації:

$$U_\delta = \int \int \int_{(V)} \bar{U}_\delta dx dy dz, \quad (87)$$

де \bar{U}_δ - щільність додаткової енергії деформації, яка пов'язана з \bar{U} співвідношенням:

$$\bar{U} + \bar{U}_\delta = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (88)$$

У загальному випадку співвідношення між \bar{U} та \bar{U}_δ ілюструються на рис. 80, де заштриховані площі під графіком залежності $\sigma(\varepsilon)$ та над ним відповідають \bar{U} та U_δ . Для лінійно пружної системи ці величини дорівнюють одна одній (рис. 81).

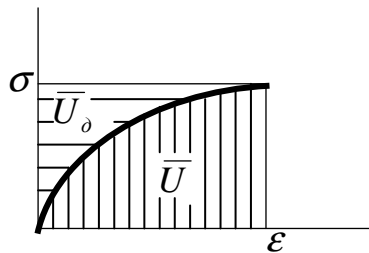


Рис. 80

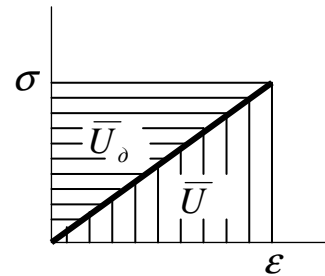


Рис. 81

Отже, стан деформованої системи характеризується повною потенціальною енергією U_n , енергією деформації U та додатковою енергією деформації U_δ . Цим величинам притаманні деякі екстремальні властивості, які математично виражаються за допомогою варіаційного обчислення, тому їх називають *варіаційними принципами деформованих систем*.

8.2. Принцип варіації переміщень (принцип Лагранжа)

Розглянемо балку, наведену на рис. 82. Будемо вважати, що $y(x)$ є дійсні переміщення, які відповідають рівновазі балки. Надамо точкам балки нескінченно малі переміщення $\delta y = \delta y(x)$ (див. рис. 82).

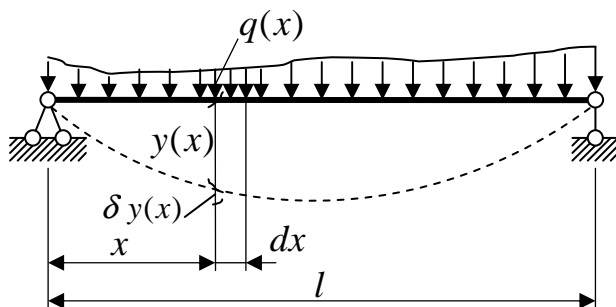


Рис. 82

Тут δy - довільна функція з нескінченно малими ординатами, що відповідають можливим переміщенням балки. Її називають варіацією функції $y(x)$.

Відповідно до принципу можливих переміщень робота всіх сил системи на цих переміщеннях повинна дорівнювати нулю:

$$\delta A = \delta A_{\text{зовн}} + \delta A_{\text{внутр}} = 0 \quad (89)$$

З іншого боку, робота усіх сил, взята з протилежним знаком, повинна дорівнювати повній потенціальній енергії системи. Інакше:

$$U_n(y) = -A_{\text{зовн}} - A_{\text{внутр}}. \quad (90)$$

Повна потенціальна енергія системи, що відповідає кінцевому стану системи з переміщеннями $y + \delta y$, буде такою:

$$U_n(y + \delta y) = -A_{\text{зовн}} - A_{\text{внутр}} - \delta A_{\text{зовн}} - \delta A_{\text{внутр}}. \quad (91)$$

Зміну енергії δU_n , викликану варіацією функції δy , називають першою варіацією енергії:

$$\delta U_n = U_n(y + \delta y) - U_n(y) = -\delta A_{\text{зовн}} - \delta A_{\text{внутр}}. \quad (92)$$

Порівнюючи (92) з (89), отримуємо співвідношення:

$$\delta U_n(y) = 0. \quad (93)$$

Умова (93) аналогічна умові $dy = 0$, що визначає умову стаціонарності функції $f(x)$ однієї змінної. У цьому курсі нас цікавить мінімум повної потенціальної енергії, оскільки він відповідає стійкій рівновазі системи. Для функції $y(x)$ це відповідає умовам:

$$dy = 0 \text{ при } d^2 y > 0,$$

а для функціоналу $U_n(y)$:

$$\delta U_n = 0; \delta^2 U_n > 0. \quad (94)$$

Умови (94) відображають принцип варіації переміщень (принцип Лагранжа): *з усіх можливих переміщень системи дійсними є такі, яким відповідає максимум повної потенціальної енергії цієї системи.*

Розглянемо далі довільну пружну систему, можливі переміщення якої визначаються скінченною кількістю незалежних узагальнених переміщень Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Умова рівності нулю варіації повної енергії

$$\delta U_n = \frac{\partial U_n}{\partial \Delta_1} \delta \Delta_1 + \frac{\partial U_n}{\partial \Delta_2} \delta \Delta_2 + \dots + \frac{\partial U_n}{\partial \Delta_n} \delta \Delta_n = 0$$

при довільних варіаціях $\delta \Delta_i$ може бути виконана лише при задовільненні рівностей

$$\frac{\partial U_n}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} + \frac{\partial W}{\partial \Delta_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (95)$$

Як свідчить співвідношення (60), потенціальна деформації лінійно деформованої системи є квадратичною функцією переміщень Δ_i . Енергія зовнішніх сил виражається добутком сил на відповідні переміщення. Отже, повна потенціальна енергія системи є квадратичною функцією переміщень, і рівняння (95) утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Ураховуючи, що за теоремою Лагранжа похідна енергії за переміщенням є силою, ці рівняння утворюють систему рівнянь рівноваги системи.

8.3. Поняття про принцип варіації напружень або внутрішніх сил (принцип Кастіліано)

Без доказів наведемо співвідношення, яке має виконуватися при варіації напружень або внутрішніх сил:

$$\delta(U_\sigma + \tilde{W}) = 0, \delta^2(U_\sigma + \tilde{W}) < 0, \quad (96)$$

де \tilde{W} - енергія зовнішніх сил, що відповідає заданим зміщенням у їх напрямку. Якщо такі зміщення відсутні, то $\tilde{W} = 0$. У цьому випадку маємо:

$$\delta U_{\delta} = 0, \delta^2 U_{\delta} < 0. \quad (97)$$

тоді принцип Кастіліано формулюється так: *з усіх статично можливих внутрішніх зусиль дійсними є такі, що забезпечують максимальне значення додаткової енергії деформації тіла.*

Зважаючи на те, що для лінійно деформованої системи максимум додаткової енергії співпадає з мінімумом енергії деформації, одержимо співвідношення:

$$\delta U = 0, \delta^2 U > 0, \quad (98)$$

що відображає умову найменшої роботи: *з усіх статично можливих внутрішніх зусиль дійсними є ті, що забезпечують мінімальне значення енергії деформації тіла або чисельно однакою з нею роботи внутрішніх зусиль.*

Якщо напружено-деформований стан лінійно деформованої системи визначається n незалежними зусиллями X_i , умова (93) набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (99)$$

Ураховуючи, що потенціальна енергія деформації системи є квадратичною функцією зусиль і за теоремою Кастіліано похідна від неї за зусиллям дає відповідне узагальнене переміщення, умови (99) приводять до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. За своєю суттю ці рівняння є рівняннями сумісності деформацій.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке повна потенціальна енергія системи?
2. Як виражається щільність потенціальної енергії деформації у випадку об'ємного напруженого стану?
3. Як пов'язані між собою щільності потенціальної енергії деформації та додаткової енергії деформації?
4. Як позначається варіація повної потенціальної енергії?
5. Як записується та як формулюється принцип Лагранжа?
6. До яких рівнянь приводить принцип Лагранжа для лінійно деформованої системи, напружено-деформований стан якої визначається скінченною кількістю незалежних узагальнених переміщень?
7. Як формулюється та як записується принцип Кастіліано в загальному випадку?
8. Наведіть формулювання умови найменшої роботи.
9. До яких рівнянь приводить принцип Кастіліано для лінійно деформованої системи, напружено-деформований стан якої виражається скінченною кількістю незалежних внутрішніх зусиль?

9. ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

9.1. Загальні поняття

Класичні методи розрахунку споруд орієнтовані на виконання розрахунків вручну. Цим пояснюється введення різноманітних спрощуючих гіпотез, розробка різних методів, що дозволяють окремо розв'язувати статичні та кінематичні рівняння статично невизначуваних задач і т. ін. Широке розповсюдження обчислювальної техніки дозволило застосовувати універсальні методи розрахунку, коли головне значення має формалізація розрахунків, а кількість обчислень відходить на другий план. Одним із таких методів є метод скінченних елементів (МСЕ). Його перевагою є можливість відмови від деяких спрощуючих припущень, формалізація розрахунків та застосування матричних операцій. Останнє дає можливість стисло записати алгебраїчні операції з великими масивами чисел.

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що континуальна за суттю конструкція подається як набір окремих її частин, що називаються *скінченними елементами* (СЕ). Ці елементи пов'язані між собою в скінченній кількості точок, що називаються *вузлами*.

В якості скінченного елемента береться малий елемент заданої розрахункової схеми, напружено-деформований стан якого відповідає напружено-деформованому стану всієї системи.

9.2. Види скінченних елементів. Ступені вільності

Розглянемо деякі скінченні елементи на прикладах.

- 1) В *рамі*, наведеній на рис. 83,а, зусилля й переміщення є функціями координат, що визначають положення перерізу вздовж осей стержнів. Розіб'ємо стержні рами на деяку кількість скінченних елементів з довжиною b , зусилля та переміщення будемо визначати тільки у вузлах (точках з'єднання елементів). Через ці вузлові величини можна потім визначити параметри напружено-деформованого стану системи для будь-якого перерізу в межах СЕ. Зрозуміло, чим меншими будуть скінченні елементи, тим ближче застосована дискретна схема буде до дійсної континуальної.

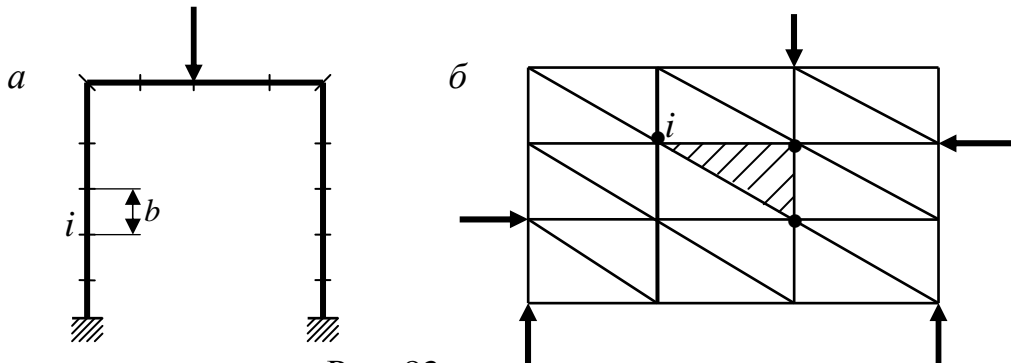


Рис. 83

- 2) *Тонка пластинка*, що зазнає плоского напруженого стану (рис. 83,б), є континуальною системою – переміщення її точок v та u є функціями координат x та y , які не мають розривів. Розбиваючи пластинку, наприклад, на трикутні

елементи, одержуємо СЕ для плоскої задачі. Нехтуючи переміщеннями вдовж ліній контакту скінченних елементів, можна вважати суттєвими тільки переміщення u_i та v_i у вузлах СЕ.

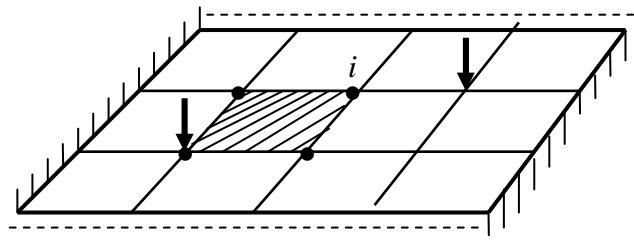


Рис. 84

3) Для *зігнутої пластинки* (рис. 84), що розраховується за технічною теорією, напружено-деформований стан визначається прогинами точок її серединної поверхні $w(x, y)$ та кутами повороту θ_x та θ_y нормалей до серединної поверхні відносно осей x та y . Розбиваючи серединну поверхню пластинки на прямокутні скінченні елементи, необхідно враховувати прогини вузлів та відповідні кути повороту. Аналогічні елементи можуть бути використані для розрахунку оболонок.

4) Незавжди визначити, що переміщення вузлів *ферми* повністю визначають напружено-деформований стан кожного стержня ферми.

Отже, форма скінченних елементів може бути різною для різних розрахункових схем.

Кількість переміщень вузлів скінченного елемента, які беруть до уваги, в його розрахунковій схемі становить ступінь вільності скінченного елемента.

На рис. 85 наведено окремий скінченний елемент рами. Напружено-деформований стан цього елемента цілком визначається переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ його кінців, отже, він має шість ступенів вільності.

Як видно з рис. 83,б, трикутний скінченний елемент тонкої пластинки, що зазнає плоского напруженого стану, має 6 ступенів вільності, оскільки кожен з трьох його вузлів може зазнавати двох незалежних переміщень.

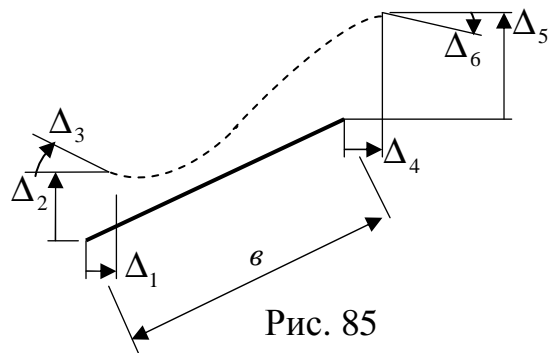


Рис. 85

Напружено-деформований стан чотирикутного елемента тонкої зігнутої пластинки (рис. 84) визначається дванадцятьма ступенями вільності – прогинами кожного вузла та кутами повороту нормалей до серединної поверхні у вузлах.

Далі будемо розглядати тільки стержневі системи – балки, рами, ферми й, відповідно, стержневі скінченні елементи.

9.3. Кінематичні характеристики вузлів рами

У стержневих системах у якості вузлів зручно брати точки з'єднання стержнів, точки прикладання зосереджених сил та моментів, місця стрибкоподібної зміни жорсткості або інтенсивності розподіленого навантаження. Скінченними елементами в цьому випадку є стержні, що з'єднують сусідні вузли.

Вузли нумеруються в довільному порядку. На рис. 86,а наведено нумерацію вузлів рами.

Для визначення взаємного розташування вузлів та їх статичних і кінематичних характеристик введемо систему координат x, y , яку назовемо загальною або глобальною.

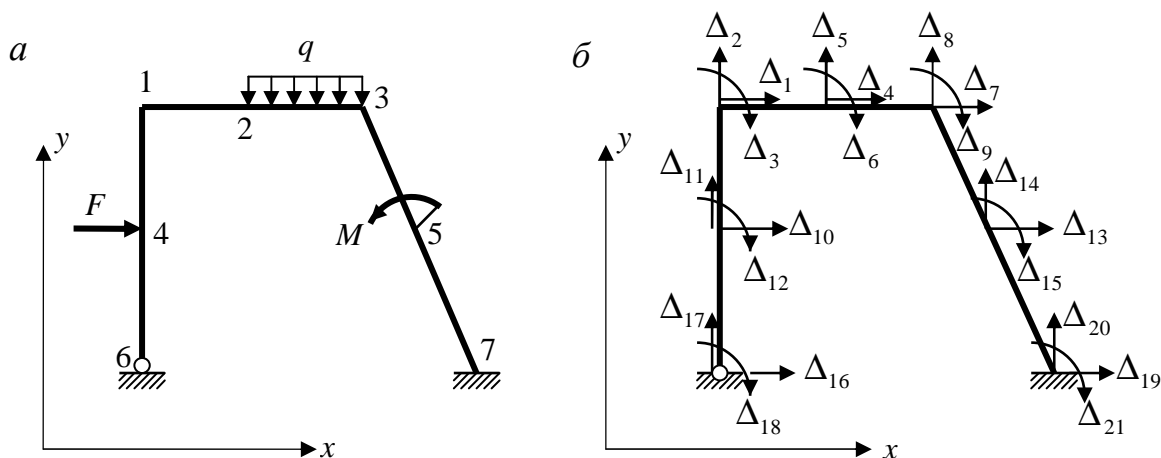


Рис. 86

Переміщення жорсткого вузла є загальними для всіх стержнів, що з'єднуються в цьому вузлі, тому кожен такий вузол має три ступені свободи. Ці ступені свободи відповідають двом лінійним та одному кутовому переміщенню. Переміщення вузлів розглянутої рами в системі координат x, y наведені на рис. 86,б. Додатні лінійні зміщення спрямовані убік відповідних координатних осей, додатні кутові зміщення – за напрямком годинникової стрілки.

Зазначимо, що наявність в'язей, наприклад, опорних, виключає можливість відповідних переміщень. У розглянутому прикладі у вузлах 6 та 7 знаходяться відповідно шарнірно-нерухома та затискаюча нерухома опори, отже, $\Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = \Delta_{21} = 0$. Крім того, поворот Δ_{18} шарнірного вузла 6 повністю визначається переміщеннями вузла 4 та навантаженням на стержні 4-6.

Зміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{15}$ є основними невідомими задачі, їх можна записати у вигляді вектора

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{15} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

який називають *вектором вузлових зміщень рами*.

9.4. Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги

На кожний із вузлів рами діють зовнішні сили та внутрішні зусилля, що передаються на вузол внаслідок деформації стержнів, які з'єднуються в цьому вузлі.

Зовнішні сили, що діють на вузол, будемо показувати у вигляді зосереджених сил та моментів, прикладених у напрямку відповідних переміщень вузлів (рис. 87).

Величини сил визначаються схемою завантаження рами. При цьому навантаження, розташовані на скінченних елементах, необхідно звести до сил, які прикладаються до вузлів. Для прикладу наведемо визначення вузлових сил від

рівномірно розподіленого навантаження для стержня (рис. 88,а) із двома жорсткими кінцями. Ці сили можна визначити з розрахунку балки із двома затисненнями на кінцях (рис. 88,б).

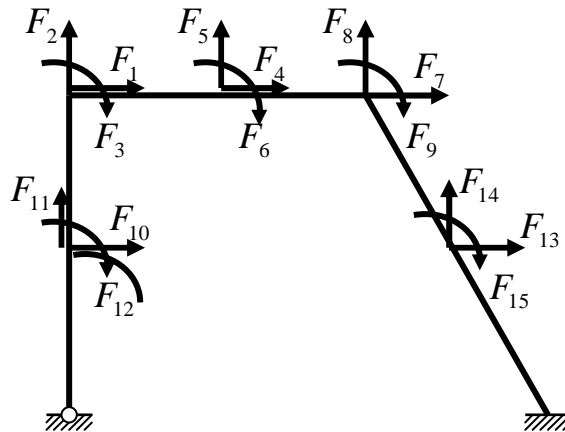


Рис. 87

Застосуємо метод початкових параметрів:

$$EIy_x = EIy_0 + EI\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24};$$

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6}.$$

Умови на початку координат у т. А дають:

$x = 0$, $\theta = 0$, звідки $EI\theta_0 = 0$; $y_0 = 0$, звідки $EIy_0 = 0$; $M_0 = M_A$ та $Q_0 = R_A$.

Умови відсутності прогинів та кутів повороту на кінці балки при $x = l$ приводять до двох рівнянь відносно M_A та R_A :

$$M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0,$$

$$M_A l + R_A \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} = 0,$$

звідки одержимо:

$$M_A = -\frac{ql^2}{12}; R_A = \frac{ql}{2}.$$

З умов симетрії балки маємо:

$$M_B = M_A = -\frac{ql^2}{12}; R_B = R_A = \frac{ql}{2}.$$

Відсікаючи лівий та правий кінці стержня (рис. 88,в), одержуємо сили та моменти, що діють на лівий та правий вузли

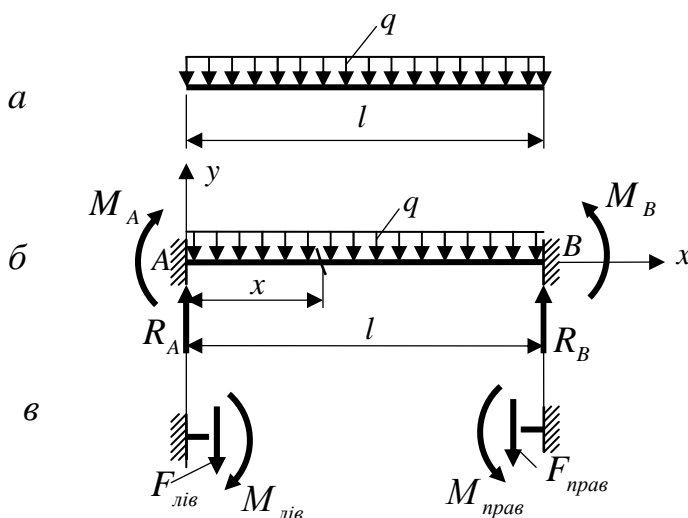


Рис. 88

на кінцях стержня:

$$F_{\text{лів}} = F_{\text{прав}} = -\frac{ql}{2}; M_{\text{лів}} = \frac{ql^2}{12}; M_{\text{прав}} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Отже, для рами (рис. 86,а) маємо:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0; F_5 = -\frac{ql_{2-3}}{2}; F_6 = \frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_7 = 0; F_8 = -\frac{ql_{2-3}}{2};$$

$$F_9 = -\frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_{10} = F; F_{11} = F_{12} = 0; F_{13} = F_{14} = 0; F_{15} = -M.$$

Ці сили можна записати у вигляді *вектора вузлових сил*:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{15} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

При зміщеннях вузлів рами на кінцях стержнів – СЕ з'являються реактивні сили, що діють на вузли. Повні реакції від усіх стержнів, які з'єднуються у вузлі, будемо подавати у вигляді складових R_i уздовж переміщень Δ_i . Напрямок цих складових – реакцій R_i – будемо подавати відповідно до їхньої дії на стержні з боку вузла, тобто назустріч вузловим силам F_i (рис. 89).

Для лінійно-деформованої системи реакції R_i можна записати так:

$$R_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \dots + K_{ij}\Delta_j + \dots + K_{in}\Delta_n, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (102)$$

Механічну суть коефіцієнта K_{ij} можна визначити, якщо задати переміщення $\Delta_j = 1$, а інші переміщення вузлів нульовими. У цьому випадку $R_i = r_{ij} = K_{ij}$, тобто K_{ij} – це реакція в напрямку i -го зміщення, викликана зміщенням $\Delta_j = 1$.

Сукупність усіх реакцій системи подамо у вигляді вектора:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{15} \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Тоді співвідношення (102) можна записати в матричній формі так:

$$\vec{R} = \vec{K} \cdot \vec{\Delta}. \quad (104)$$

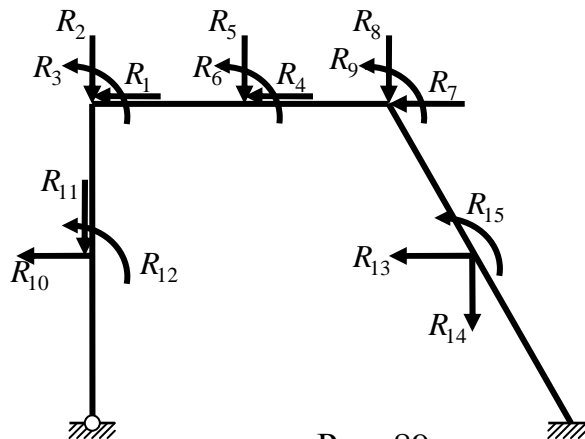


Рис. 89

Тут

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (105)$$

- матриця реакцій від одиничних зміщень вузлів і називається *матрицею жорсткості системи*.

Зазначимо, що, оскільки елементами матриці жорсткості є одиничні реакції, для них має місце взаємність, тобто $K_{ij} = r_{ij} = r_{ji} = K_{ji}$.

На кожен вузол рами діють у протилежних напрямках зовнішні сили F_i та реакції стержнів R_i . Оскільки рама знаходиться в рівновазі, кожен її вузол теж урівноважений, тобто

$$R_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

або в матричній формі

$$\vec{R} - \vec{F} = \vec{0}, \quad (106)$$

де

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - нульовий вектор.}$$

З урахуванням (104) співвідношення (106) набуває такого виду:

$$\vec{K} \cdot \vec{\Delta} - \vec{F} = \vec{0}. \quad (107)$$

Матричне рівняння (107) дає можливість визначити переміщення вузлів від заданого навантаження, якщо відомі елементи матриці жорсткості системи.

9.5. Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат

Для окремого стержня рами (рис. 90,а) уведемо систему координат $x'y'$ так, що її початок знаходиться на кінці стержня, що відповідає вузлу з меншим номером. Цю точку назвемо початком стержня. Вісь x' спрямуємо вздовж стержня убік його кінця, а вісь y' - перпендикулярно осі стержня так, щоб прямий кут був відкладений від осі x' проти годинникової стрілки. Цю систему координат називають *локальною*.

Переміщення кінців стержня δ_i нумеруємо так, як показано на рис. 89,а. Аналогічно нумеруємо реакції r'_i (рис. 90,б). При цьому зауважимо, що напрямок цих реакцій відповідає їхній дії від вузла на стержень.

Вектор реакцій елемента

$$\vec{r}'_e = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_6 \end{bmatrix}_e$$

та вектор переміщень його кінців

$$\vec{\delta}'_e = \begin{bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_6 \end{bmatrix}_e$$

пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}'_e = \vec{K}'_e \cdot \vec{\delta}'_e, \quad (108)$$

де

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & \cdots & K'_{16} \\ K'_{21} & K'_{22} & \cdots & K'_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{61} & K'_{62} & \cdots & K'_{66} \end{bmatrix}_e \quad (109)$$

- матриця жорсткості елемента у локальній системі координат. Нагадаємо, що елемент K'_{ij} цієї матриці є реакцією r'_{ij} стержня в i -му напрямку, викликаною переміщенням $\delta'_j = 1$.

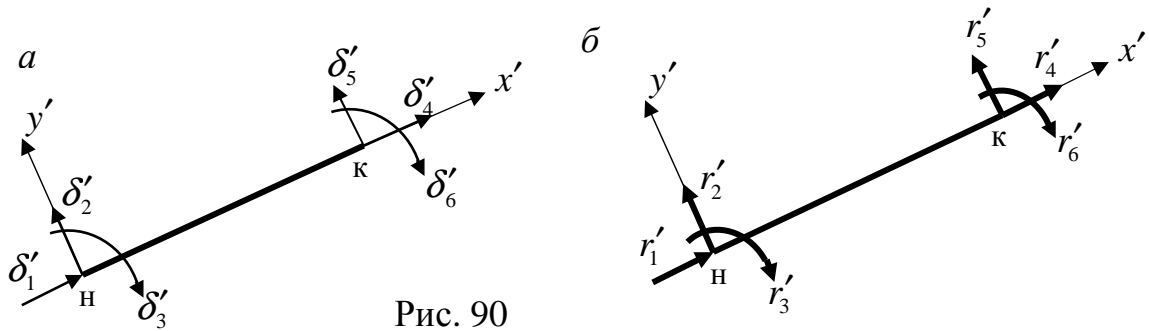


Рис. 90

Елементи матриці \vec{K}'_e залежать від умов на кінцях стержня. Визначення деяких із цих реакцій покажемо далі на прикладі стержня з обома жорсткими кінцями. Для зручності будемо розглядати стержень горизонтальним.

На рис. 91,а наведено стан стержня при зміщенні $\delta'_1 = 1$. Таке зміщення викликає стиск стержня. Поздовжню силу визначимо з формули Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -1. \text{ Отже, } N = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{11} = \frac{EA}{l}, \quad r'_{41} = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{21} = r'_{31} = r'_{51} = r'_{61} = 0.$$

Реакції від зміщення $\delta'_2 = 1$ (рис. 91,б) знайдемо за допомогою методу початкових параметрів. З урахуванням того, що на початку координат $\theta_0 = 0; y_0 = 1; M_0 = r'_{32}; Q_0 = r'_{22}$, маємо:

$$EI y_x = EI + r'_{32} \frac{x^2}{2} + r'_{22} \frac{x^3}{6}; \quad EI \theta_x = r'_{32} x + r'_{22} \frac{x^2}{2}.$$

З умов на правому кінці стержня $x = l; y_x = 0; \theta_x = 0$ одержимо:

$$r'_{22} = \frac{12EI}{l^3}; \quad r'_{32} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

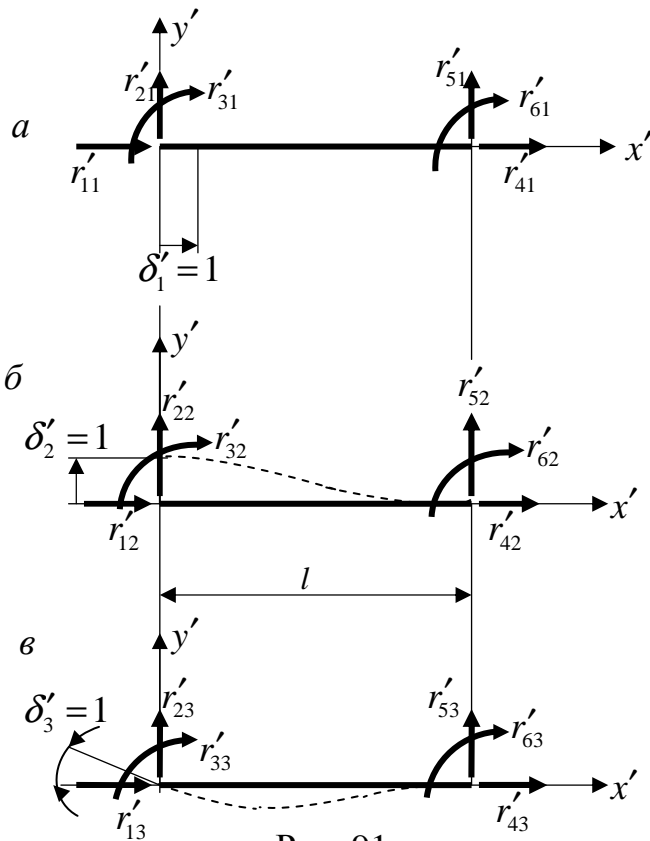


Рис. 91

Далі з рівноваги стержня знаходимо

$$r'_{52} = -\frac{12EI}{l^3}; r'_{62} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

Оскільки розтяг – стиск при переміщенні δ'_2 відсутні,

$$r'_{12} = r'_{42} = 0.$$

Реакції при зміщеннях $\delta'_4 = 1, \delta'_5 = 1$ та $\delta'_6 = 1$ неважко визначити з умов симетрії.

Так само одержимо реакції від зміщення $\delta'_3 = 1$:

$$r'_{13} = r'_{43} = 0; \quad r'_{23} = -\frac{6EI}{l^2};$$

$$r'_{33} = \frac{4EI}{l}; \quad r'_{53} = \frac{6EI}{l^2};$$

$$r'_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

Отже, матриця жорсткості для такого стержня має такий вигляд:

$$\bar{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

Аналогічно можна одержати матрицю жорсткості для стержня із шарніром на початку й затисненням на кінці:

$$\bar{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

При необхідності можна записати також матрицю жорсткості для стержня із шарніром на правому кінці. Слід зазначити, що матриця жорсткості для стержня із шарніром у наведеному вигляді не може застосовуватись для розрахунку окремого стержня, оскільки визначник її дорівнює нулю.

9.6. Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат

Переміщення вузлів рами $\vec{\Delta}$ записані у загальній – *глобальній системі координат*, отже, для її розрахунку необхідно матрицю жорсткості стержня також записувати у цій системі координат, а від переміщень та реакцій вузлів рами переходити до переміщень та реакцій на кінцях стержня у локальній системі координат.

Для перетворення переміщень та реакцій стержня із глобальної (рис. 92) у локальну систему координат слугує *матриця перетворення координат* \vec{T}_e .

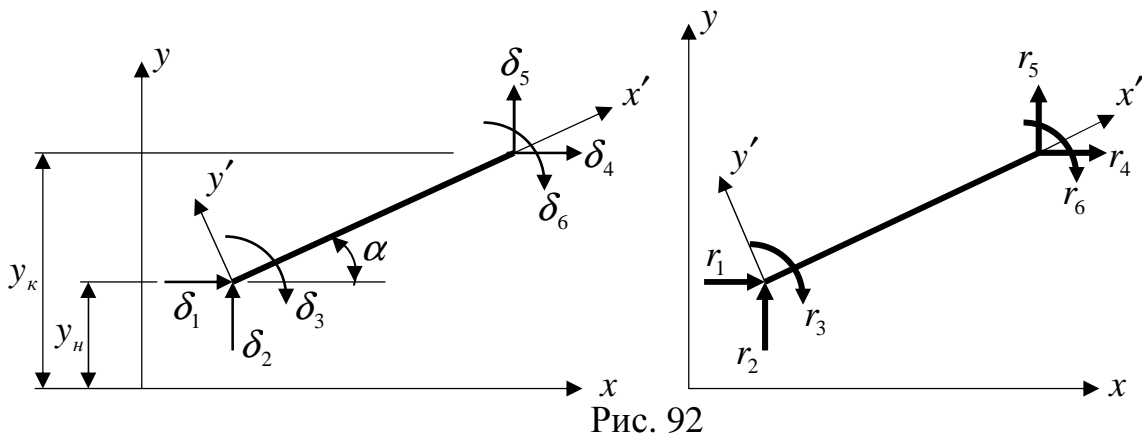


Рис. 92

Для стержня рами ця матриця має такий вигляд:

$$\vec{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e. \quad (110)$$

Тригонометричні функції кута α можна виразити через координати початку та кінця стержня у глобальній системі координат (рис. 92):

$$\sin \alpha = \frac{y_k - y_n}{l}; \cos \alpha = \frac{x_k - x_n}{l};$$

$$l = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}.$$

За допомогою матриці \vec{T}_e можна записати

$$\begin{aligned}\vec{\delta}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{\delta}_e; \\ \vec{r}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{r}_e,\end{aligned}\tag{111}$$

У глобальній системі координат вектори реакцій та переміщень елемента пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним (108):

$$\vec{r}_e = \vec{K}_e \cdot \vec{\delta}_e,\tag{112}$$

де \vec{K}_e - матриця жорсткості елемента в глобальній системі координат. Вона пов'язана з матрицею \vec{K}'_e в локальній системі координат:

$$\vec{K}_e = \vec{T}_e^T \vec{K}'_e \vec{T}_e.\tag{113}$$

Індекс «Т» у матриці означає її транспонування, тобто заміну в ній стовпчиків рядками та навпаки.

Для стержня із двома жорсткими кінцями елементи матриці \vec{K}_e будуть такими:

$$\begin{aligned}K_{11} &= K_{44} = -K_{14} = -K_{41} = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha; \\ K_{22} &= K_{55} = -K_{25} = -K_{52} = \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha; \\ K_{33} &= K_{66} = \frac{4EI}{l}; \\ K_{12} &= K_{21} = K_{45} = K_{54} = -K_{15} = -K_{51} = -K_{24} = -K_{42} = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha; \\ K_{13} &= K_{31} = K_{16} = K_{61} = -K_{46} = -K_{64} = -K_{34} = -K_{43} = \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha; \\ K_{35} &= K_{53} = K_{56} = K_{65} = -K_{23} = -K_{32} = -K_{26} = -K_{62} = \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha; \\ K_{36} &= K_{63} = \frac{2EI}{l}.\end{aligned}\tag{114}$$

Для стержня з затисненням на початку і шарніром на кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. (115)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням на кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. (116)$$

9.7. Матриця жорсткості елемента ферми

Стержні ферм з'єднані у вузлах шарнірами, тому при вузловому навантаженні вони зазнають тільки розтягу-стиску. У такому разі, на відміну від рам, для стержня ферми необхідно враховувати тільки лінійні переміщення вузлів та відповідні реакції. Ці переміщення та реакції для окремого стержня в глобальній системі координат наведені на рис. 93.

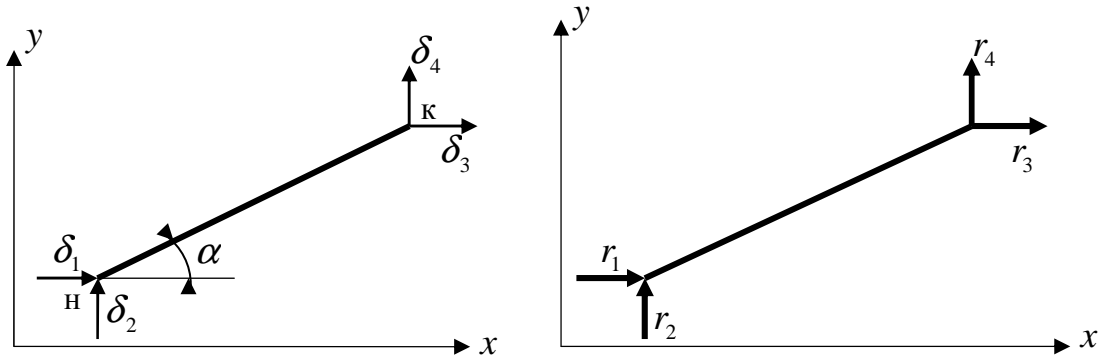


Рис. 93

Значення елементів матриці жорсткості для стержня ферми можна одержати з відповідних значень для стержня рами. Для цього необхідно виключити в останніх величини, що враховують згин стержня, та змінити індекси. Таким чином, отримуємо матрицю:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (117)$$

9.8. Матриця жорсткості всієї системи

Довільний елемент K_{ij} матриці жорсткості (105) системи є реакцією в напрямку зміщення Δ_i , викликаною зміщенням вузла $\Delta_j = 1$. Отже, елементами, наприклад, дев'ятого стовпчика матриці жорсткості рами (рис. 86,а) будуть реакції від зміщення $\Delta_9 = 1$. На рис. 94,а наведені ці вузлові реакції. Відзначимо, що, оскільки всі переміщення, крім Δ_9 , передбачаються нульовими, деформуватися при цьому будуть лише стержні 2-3 та 3-5.

Переміщення $\Delta_9 = 1$ одночасно є переміщенням $\delta_6^{2-3} = 1$ кінця стержня 2-3 та переміщенням $\delta_3^{3-5} = 1$ початку стержня 3-5 (рис. 94,б). Реакції стержнів у вузлах підсумовуються, визначаючи таким чином вузлові реакції – елементи загальної матриці жорсткості системи. Ураховуючи, що при переміщенні Δ_9 ,

стержні 1-2, 1-4, 4-6 та 5-7 не деформуються, реакції цих стержнів дорівнюють нулю. Отже, одержуємо такі значення елементів 9-го стовпчика загальної матриці жорсткості рами:

$$\begin{aligned} K_{4,9} &= K_{1,6}^{2-3}; K_{5,9} = K_{2,6}^{2-3}; K_{6,9} = K_{3,6}^{2-3}; \\ K_{7,9} &= K_{4,6}^{2-3} + K_{1,3}^{3-5}; K_{8,9} = K_{5,6}^{2-3} + K_{2,3}^{3-5}; K_{9,9} = K_{6,6}^{2-3} + K_{3,3}^{3-5}; \\ K_{13,9} &= K_{4,3}^{3-5}; K_{14,9} = K_{5,3}^{3-5}; K_{15,9} = K_{6,3}^{3-5}; \\ K_{1,9} &= K_{2,9} = K_{3,9} = K_{10,9} = K_{11,9} = K_{12,9} = 0. \end{aligned}$$

9.9. Визначення зусиль у стержнях рами

Розв'язок рівняння (102) дає вектор переміщень вузлів рами:

$$\bar{\Delta} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F}. \quad (118)$$

Елементи вектора переміщень одночасно є елементами вектора переміщень кінців відповідних стержнів рами в глобальній системі координат.

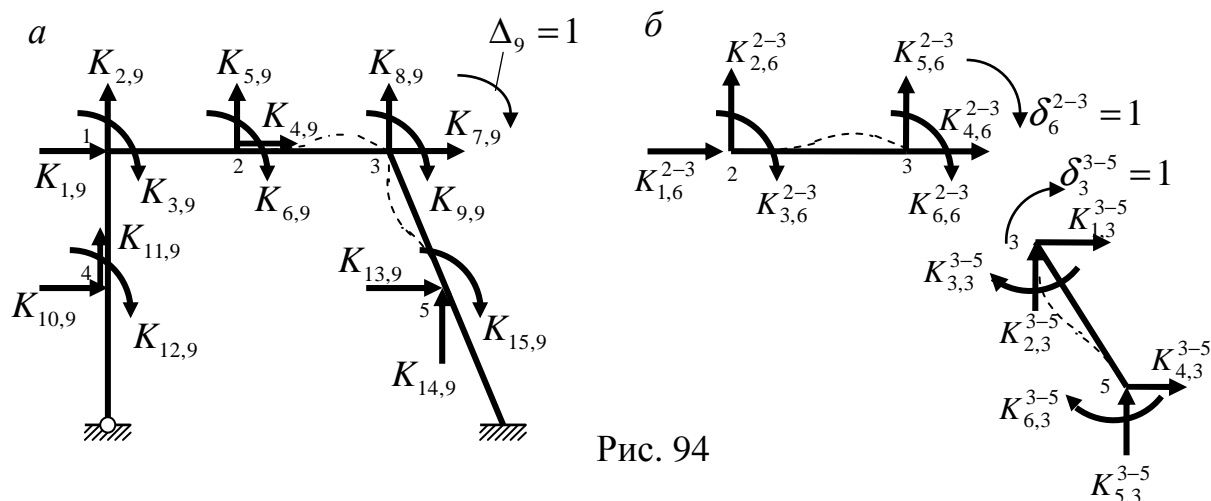


Рис. 94

Наприклад, для стержня 2-3 рами (рис. 85,а) одержуємо:

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}_{2-3}.$$

На рис. 95 наведені додатні напрямки зусиль на кінцях елемента.

Величини цих зусиль складають вектор $\bar{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ Q_n \\ M_n \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{bmatrix}.$

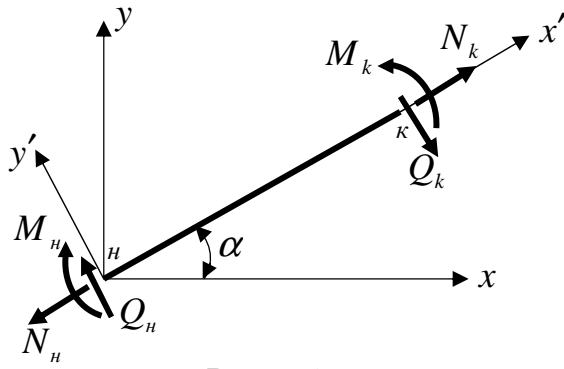


Рис. 95

Зусилля на кінцях стержня визначаються через переміщення кінців стержня та навантаження на стержні: $\vec{S}_e = \vec{h}_e \cdot \vec{\delta}_e + \vec{q}_e'$. (119)

Тут: \vec{h}_e - матриця, що перетворює переміщення кінців елементу в глобальній системі координат у зусилля, що діють на початку та кінці стержня від цих переміщень; \vec{q}_e' - вектор

реакцій на кінцях стержня від навантаження на стержні в локальній системі координат.

Для стержня з жорсткими кінцями матриця \vec{h}_e має такий вигляд:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Для стержня з затисненням на початку та шарніром на кінці:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням на кінці:

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (122)$$

Вектори реакцій \bar{q}_e' від рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного в межах стержня відповідно з обома жорсткими кінцями, з затисненням на початку і шарніром на кінці та з шарніром на початку і затисненням на кінці мають такий вигляд:

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{12} + \frac{q_y l_x^2}{12} \\ -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{12} - \frac{q_y l_x^2}{12} \end{bmatrix}; \bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{8} + \frac{q_y l_x^2}{8} \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (123)$$

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \\ -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{8} - \frac{q_y l_x^2}{8} \end{bmatrix}. \quad (124)$$

Складові навантаження q_x та q_y та складові довжини стержня l_x та l_y беруть відповідно до рис. 96.

При відсутності навантаження на стержні вектор \bar{q}_e' буде нульовим.

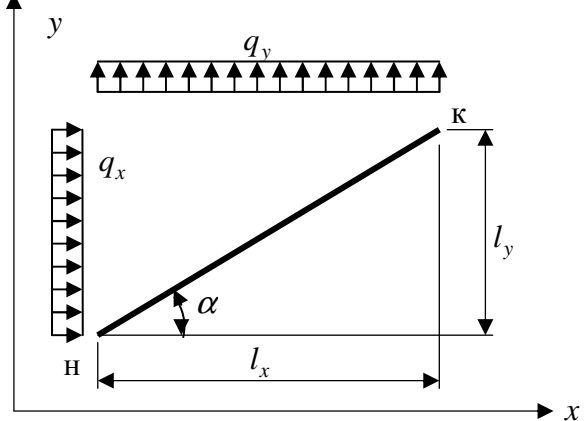


Рис. 96

9.10. Визначення зусиль у стержнях ферми

Після визначення переміщень вузлів, як і для рами, для кожного стержня ферми можна записати вектор переміщень його кінців у глобальній системі координат:

$$\bar{\delta}_e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор зусиль на кінцях стержня ферми можна записати відповідно до рис. 97.

$$\bar{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ 0 \\ N_k \\ 0 \end{bmatrix}.$$

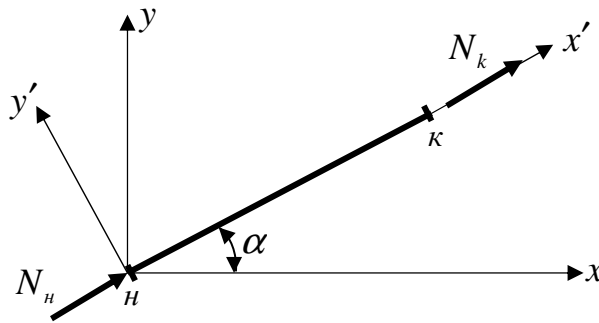


Рис. 97

Вираз для зусиль у стержні ферми має вигляд:

$$\bar{S}_e = \bar{h}_e \cdot \bar{\delta}_e. \quad (125)$$

Матриця перетворення переміщень у глобальній системі координат до зусиль у стержні ферми має такий вигляд:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (126)$$

Зауважимо, що у межах стержня ферми зусилля не змінюється, тобто $N_n = N_k$.

9.11. Приклад розрахунку рами методом скінченних елементів

Застосуємо метод скінченних елементів для розрахунку рами, наведеної на рис. 98. Жорсткості стояка відповідно на розтяг-стиск та згин становлять $4EI$ та $4EA = 40EI$.

Нумерацію вузлів показано на рис. 98, переміщення вузлів та вузлові навантаження - на рис. 99.

Складаємо вектор вузлових навантажень. Вектори навантажень для

вузлів 1 та 4 будуть такими:

$$\bar{F}^1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

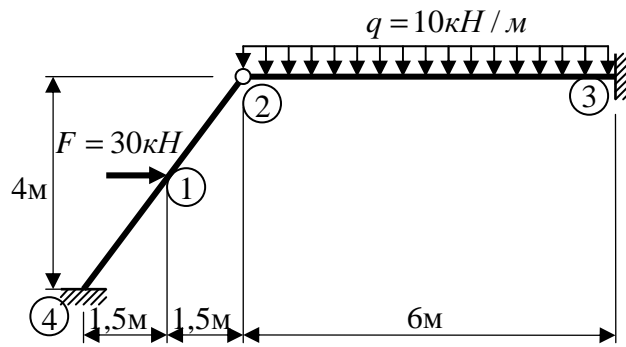


Рис. 98

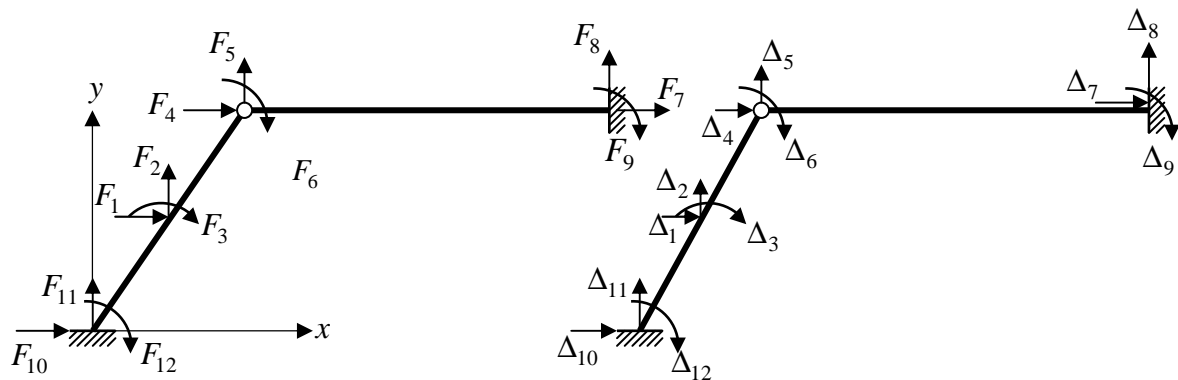


Рис. 99

Для отримання складових векторів навантажень у вузлах 2 та 3 розглянемо стержень 2-3 як балку (рис. 100) під дією розподіленого навантаження.

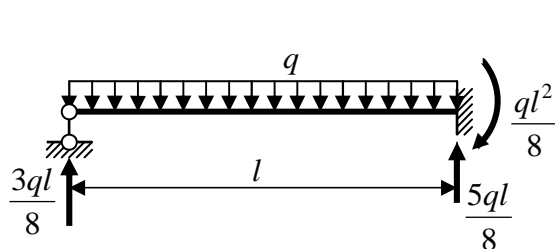


Рис. 100

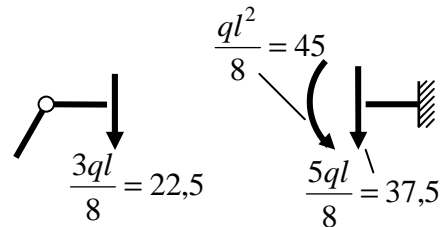


Рис. 101

Реакції балки протилежні за напрямком сил, які діють на вузли на кінцях стержня (рис. 101). Отже, маємо:

$$\vec{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -22,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -37,5 \\ -45 \end{bmatrix}.$$

Елементи векторів $\vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3, \vec{F}^4$ складають вектор \vec{F} вузлових навантажень рами. Виключаючи з цього вектора елементи, що відповідають нульовим переміщенням $\Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}$ у напрямку відсутнього повороту шарніра та опорних закріплень у вузлах 3, 4, остаточно отримуємо:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}^1 \\ \vec{F}^2 \\ \vec{F}^3 \\ \vec{F}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -37,5 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \end{bmatrix}.$$

Матриці жорсткості обчислюємо починаючи з стержня 1-4, у якого обидва кінці жорсткі. Жорсткості цього стержня такі: на згин EI, на розтяг – EA=10EI; геометричні характеристики його осі:

$$\Delta_x = 0 - 1,5 = -1,5; \quad \Delta_y = 0 - 2 = -2; \quad l = \sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2} = 2,5;$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2,5} = -0,8; \quad \cos \alpha = \frac{-1,5}{2,5} = -0,6;$$

Матриця жорсткості стержня, елементи якої обчислюються за (114), буде такою:

$$\vec{K}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} 1,932 & 1,551 & -0,768 & -1,932 & -1,551 & -0,768 \\ 1,551 & 2,836 & 0,576 & -1,551 & -2,836 & 0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ -1,932 & -1,551 & 0,768 & 1,932 & 1,551 & 0,768 \\ -1,551 & -2,836 & -0,576 & 1,551 & 2,836 & -0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-2 має жорсткий кінець на початку (вузол 1) і шарнір на кінці (вузол 2). Жорсткість та довжина стержня такі самі, як у стержня 1-4, $\sin \alpha = 0,8$; $\cos \alpha = 0,6$. Матрицю жорсткості стержня складаємо за (115):

$$\vec{K}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 1,563 & 1,828 & 0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 \\ 1,828 & 2,629 & -0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 1,563 & 1,828 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,629 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 2-3 з шарніром на початку (вузол 2) та затисненням на кінці (вузол 3) маємо: жорсткості на згин 4EI, на розтяг – 4EA=40EI; $\Delta_x = 6$; $\Delta_y = 0$; $l = 6$; $\sin \alpha = 0$; $\cos \alpha = 1$.

Матрицю жорсткості стержня обчислюємо за (116):

$$\vec{K}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}.$$

Додаючи один до одного відповідні елементи матриць жорсткості стержнів, одержимо матрицю жорсткості усієї рами:

$$\vec{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 8,2297 & 1,828 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Викреслюючи з цієї матриці шостий рядок та стовпчик, остаточно маємо:

$$\vec{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 8,2297 & 1,828 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 \end{bmatrix}.$$

Далі отримуємо розв'язок рівняння (107):

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{bmatrix} = \vec{K}^{-1} \cdot \vec{F} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 3,77 \\ -17,46 \end{bmatrix}.$$

За (120), (121), (122) складаємо матриці перетворення переміщень кінців вузлів у зусилля на кінцях стержнів:

$$\vec{h}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,6144 & -0,4608 & -0,96 & -0,6144 & 0,4608 & -0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,6144 & 0,4608 & 0,96 & 0,6144 & -0,4608 & 0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,1526 & 0,1152 & -0,48 & 0,1526 & -0,1152 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,1526 & -0,1152 & 0,48 & -0,1526 & 0,1152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вектори зусиль на кінцях стержнів від розподіленого навантаження на них складаємо за (123), (124):

$$\vec{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 37,5 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Формуємо вектори переміщень кінців стержнів у глобальній системі координат:

$$\vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 23,18 \\ -21,92 \\ 7,75 \\ 3,77 \\ -17,46 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 3,77 \\ -17,46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо зусилля на кінцях стержнів за (119):

$$\vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \vec{\delta}_{1-4} + \vec{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 14,51 \\ 16,90 \\ -18,03 \\ -14,51 \\ -16,90 \\ -24,23 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-2} = \vec{h}_{1-2} \vec{\delta}_{1-2} + \vec{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 32,31 \\ -7,20 \\ 18,04 \\ -32,31 \\ 7,20 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{S}_{2-3} = \vec{h}_{2-3} \vec{\delta}_{2-3} + \vec{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 25,13 \\ 21,53 \\ 0 \\ -25,13 \\ 38,47 \\ 50,80 \end{bmatrix}.$$

За результатами розрахунків на рис. 102, 103 побудовано епюри внутрішніх зусиль.

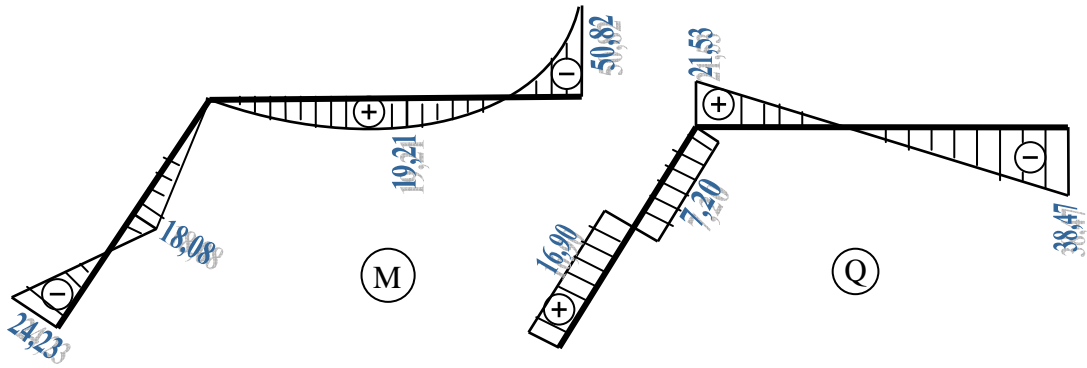


Рис. 102

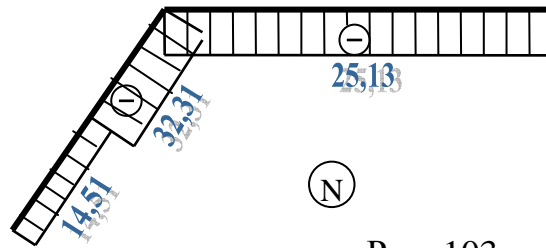


Рис. 103

При побудові епюр слід пам'ятати, що зусилля отримані у локальній системі координат.

9.12. Приклад розрахунку ферми МСЕ

Розрахуємо ферму, наведену на рис. 104, за умови однакової жорсткості ЕА усіх її стержнів. Пронумеруємо вузли як показано на рис. 104 і покажемо переміщення вузлів (рис. 105). Враховуючи, що переміщення $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = \Delta_8 = 0$, складемо вектор вузлових переміщень та відповідний вектор вузлових сил:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

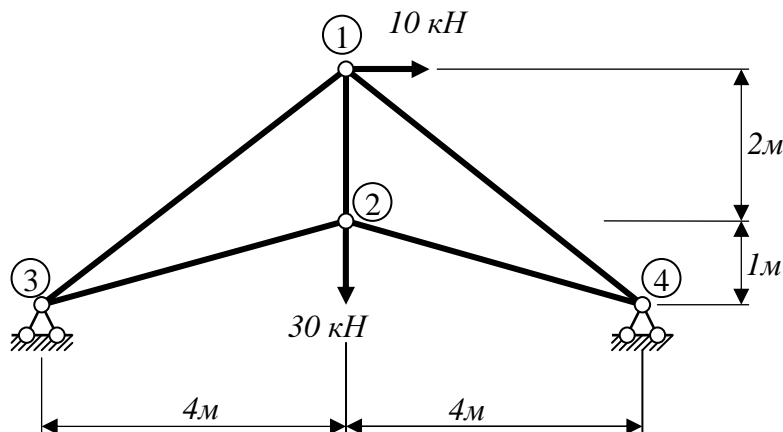


Рис. 104

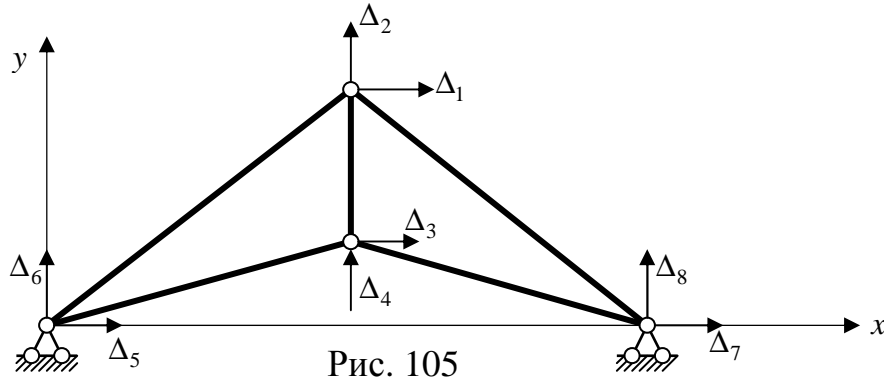


Рис. 105

Далі формуємо матриці жорсткості окремих елементів ферми. Стержень 1-3 (рис. 106,а).

$$\Delta_x = 0 - 4 = -4\text{ м}; \Delta_y = 0 - 3 = -3\text{ м}; l = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \cos\alpha = \frac{-4}{5} = -0,8.$$

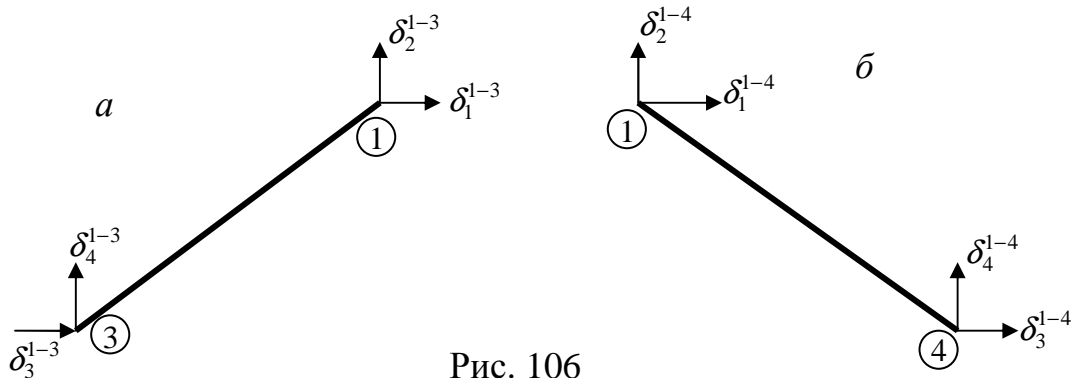


Рис. 106

Зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютного значення жорсткості елементів. Отже, за умови постійної жорсткості приймемо для зручності $EA=1$, за (117) одержимо:

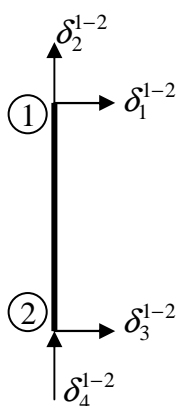


Рис. 107

$$\vec{K}_{1-3} = \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-4 (рис. 106,б).

$$\Delta_x = 8 - 4 = 4\text{ м}; \Delta_y = 0 - 3 = -3\text{ м}; l = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\vec{K}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,096 & -0,128 & 0,096 \\ -0,096 & 0,072 & 0,096 & -0,072 \\ -0,128 & 0,096 & 0,128 & -0,096 \\ 0,096 & -0,072 & -0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-2 (рис. 107).

$$\Delta_x = 4 - 4 = 0; \Delta_y = 1 - 3 = -2m;$$

$$l = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2m;$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2} = -1; \cos \alpha = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\vec{K}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

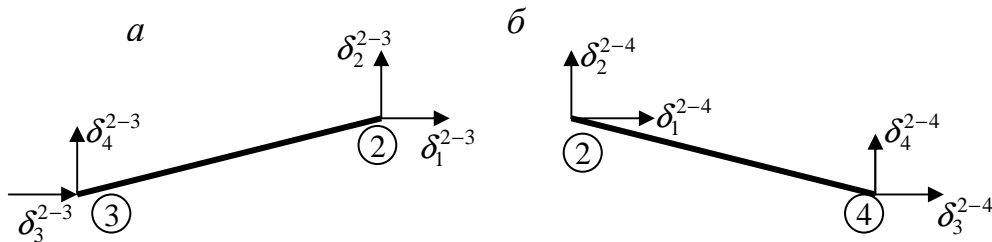


Рис. 108

Стержень 2-3 (рис. 108,а).

$$\Delta_x = 0 - 4 = -4m; \Delta_y = 0 - 1 = -1m; l = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = 4,123m;$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos \alpha = \frac{-4}{4,123} = -0,9701.$$

$$\vec{K}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0,2286 & 0,05706 & -0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & 0,01426 & -0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & -0,05706 & 0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & -0,01426 & 0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Стержень 2-4 (рис. 108,б).

$$\Delta_x = 8 - 4 = 4m; \Delta_y = 0 - 1 = -1m; l = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = 4,123m;$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos \alpha = \frac{4}{4,123} = 0,9701;$$

$$\vec{K}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2286 & -0,05706 & -0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & 0,01426 & 0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & 0,05706 & 0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & -0,01426 & -0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Далі обчислюємо елементи матриці жорсткості ферми:

$$K_{11} = K_{11}^{1-3} + K_{11}^{1-4} + K_{11}^{1-2} = 0,128 + 0,128 + 0 = 0,256;$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{12}^{1-3} + K_{12}^{1-4} + K_{12}^{1-2} = 0,096 - 0,096 + 0 = 0;$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{13}^{1-2} = 0; K_{14} = K_{41} = K_{14}^{1-2} = 0;$$

$$K_{22} = K_{22}^{1-3} + K_{22}^{1-4} + K_{22}^{1-2} = 0,072 + 0,072 + 0,5 = 0,644;$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{23}^{1-2} = 0; K_{24} = K_{42} = K_{24}^{1-2} = -0,5;$$

$$K_{33} = K_{33}^{1-2} + K_{11}^{2-3} + K_{11}^{2-4} = 0 + 0,2286 + 0,2286 = 0,4572;$$

$$K_{34} = K_{43} = K_{34}^{1-2} + K_{12}^{2-3} + K_{12}^{2-4} = 0 + 0,05706 - 0,05706 = 0;$$

$$K_{44} = K_{44}^{1-2} + K_{22}^{2-3} + K_{22}^{2-4} = 0,5 + 0,01426 + 0,01426 = 0,52852.$$

Отже, матриця жорсткості ферми має такий вигляд:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0,256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,644 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,4572 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,52852 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги вузлів, одержимо:

$$\vec{\Delta} = \vec{K}^{-1} \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,80 \end{bmatrix}.$$

Матриці перетворення переміщень вузлів у зусилля складаємо за (126):

$$\begin{aligned} \vec{h}_{1-3} &= \begin{bmatrix} -0,16 & -0,12 & 0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,16 & 0,12 & -0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,12 & -0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16 & 0,12 & 0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \vec{h}_{1-2} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{2-3} = \begin{bmatrix} -0,2353 & -0,05706 & 0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2353 & 0,05706 & -0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \vec{h}_{2-4} &= \begin{bmatrix} 0,2353 & -0,05706 & -0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2353 & 0,05706 & 0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Формуючи вектори переміщень вузлів для кожного елемента, обчислюємо за (125) зусилля:

$$\vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-3} = \vec{h}_{1-3} \cdot \vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} 13,58 \\ 0 \\ -13,58 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \cdot \vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} 26,17 \\ 0 \\ -26,17 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,8 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-2} = \vec{h}_{1-2} \cdot \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} -23,91 \\ 0 \\ 23,91 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-3} = \vec{h}_{2-3} \cdot \vec{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-4} = \vec{h}_{2-4} \cdot \vec{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, зусилля в стержнях ферми від заданого навантаження такі:

$$N_{1-3} = -13,58 \text{ кН}; N_{1-4} = -26,17 \text{ кН}; N_{1-2} = 23,91 \text{ кН}; N_{2-3} = N_{2-4} = -12,2 \text{ кН}.$$

Запитання для самоконтролю

1. У чому суть методу скінченних елементів?
2. Які переваги МСЕ перед класичними методами?
3. Що називають скінченним елементом?
4. Наведіть приклади скінченних елементів.
5. Як визначається кількість ступенів вільності скінченного елемента?
6. Скільки ступенів вільності має СЕ рами? Ферми? Трикутного елемента тонкої зігнутої пластинки? Трикутного елемента плоскої задачі теорії пружності?
7. Що приймають у якості вузлів рами?
8. Які величини приймають у якості кінематичних характеристик вузлів рами?
9. Що є статичними характеристиками вузлів рами? Як вони визначаються?
10. Яка матриця називається матрицею жорсткості?
11. Які величини є елементами матриці жорсткості? Яку властивість мають елементи матриці жорсткості?
12. Наведіть рівняння рівноваги вузлів у матричній формі.
13. Яку систему координат називають локальною? Глобальною?
14. Який зв'язок існує між векторами реакцій на кінцях елемента і переміщеннями?
15. Який розмір має матриця жорсткості елемента рами? Ферми?
16. Як пов'язані між собою вектори переміщень у локальній та глобальній системах координат?
17. Для чого слугує матриця перетворення координат?
18. Як пов'язані між собою матриці жорсткості в локальній та глобальній системах координат?
19. Як складається матриця жорсткості системи?
20. Як визначається вектор переміщень вузлів системи?
21. Як визначаються зусилля на кінцях стержня рами після визначення переміщень?
22. Як визначаються зусилля в стержнях ферми через переміщення його кінців?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Баженов, В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. / В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов; за заг. ред. д.т.н., проф. В. А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
2. Шутенко, Л.М. Механіка споруд / Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А.; Харк. держ. акад. міськ. госп-ва – Х.: ХДАМГ, 2001. – 234 с.
3. Шутенко, Л.Н. Строительная механика: Краткий курс. Раздел 1. Статически определимые системы. / Л. Н Шутенко., В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько; Харьк. нац. акад. міськ. гос-ва – Х.: ХГАГХ, 2003. – 90с.
4. Строительная механика / Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479с.
5. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лещеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512с.
6. Строительная механика. Общий курс: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
7. Баженов, В. А. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник / В. А. Баженов – К.: Каравела, 2010.
8. Чихладзе, Э. Д. Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений / Э. Д. Чихладзе – Х.: УкрГАЗТ, 2004.-305с.
9. Сопротивление материалов. Под общей ред. Акад. АН УССР Г. С. Писаренко. - К.: Вища школа, 1973, 672 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Шутенко Леонід Миколайович,

Шпачук Володимир Петрович,

Засядько Микола Андрійович

Конспект лекцій

з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання
бакалаврів за напрямом підготовки 6.060101 “Будівництво”)

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

Редактор *О. В. Тарасюк*

Комп’ютерне верстання *Н. В. Зражевська*

План 2011, поз. 113 Л

Підп. до друку 19.10.2011

Друк на ризографі

Тираж 50 пр.

Формат 60×84 1/16

Ум. друк. арк. 7,02

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:

ДК №4064 від 12.05.2011р.